Physique - Devoir Maison Entrainement #02

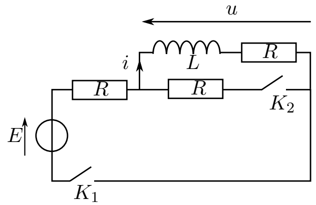
15/10/2025

Corrigé

I Étude de régimes transitoires successifs

Le circuit ci-dessous, alimenté par un générateur de tension continue E, est constitué d'une bobine d'inductance $L = 100\,\mathrm{mH}$, de trois résistors de même résistance $R = 100\,\Omega$ et de deux interrupteurs K_1 et K_2. Les deux interrupteurs sont ouverts depuis longtemps quand à $t = 0$ on ferme l'interrupteur K_1 (l'interrupteur K_2 reste ouvert). A l'instant $t_1 = 5{,}0\,\mathrm{ms}$, on ferme K_2 (l'interrupteur K_1 est toujours fermé). Enfin à l'instant $t_2 = 10\,\mathrm{ms}$, on ouvre K_1 (K_2 reste fermé).

Le but de l'exercice est d'étudier $i(t)$ et $u(t)$ pour $t \in]0, +\infty[$. Pour cela, l'exercice est décomposé en parties indépendantes. Seules les deux dernières questions nécessitent d'avoir traité l'ensemble de l'exercice.

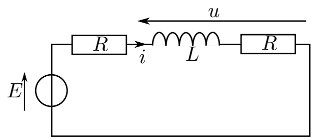


I.A Étude pour $t \in]0, t_1[$

1. *Exprimer l'intensité i et la tension u à l'instant $t = 0^+$, juste après la fermeture de l'interrupteur K_1.*

Réponse :

A l'instant $t = 0^-$, le circuit est en régime permanent, et les interrupteurs sont ouverts. Comme le circuit est ouvert, il n'y a pas de courant circulant dans le circuit. Donc $\boxed{i(0^-) = 0}$.



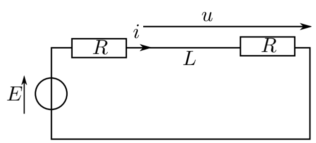
Par continuité de l'intensité traversant la bobine, on en déduit $\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$.
Comme il n'y a pas de courant à $t = 0^+$, les tensions aux bornes des résistances sont nulles. En appliquant la loi des mailles : $\boxed{u(0^+) = E}$

---

2. *En supposant que le régime permanent est atteint à l'instant $t = t_1^-$, exprimer $i(t_1^-)$ et $u(t_1^-)$.*

Réponse :

En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil. Le circuit se résume à un générateur alimentant deux résistances : $\boxed{i(t_1^-) = \dfrac{E}{2R} \quad ; \quad u(t_1^-) = \dfrac{E}{2}}$



---

3. *Établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ pour $t \in]0, t_1[$. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :*

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_1} i = A_1$$

Exprimer les constantes τ_1 et A_1 en fonction des données du problème.

Réponse :
On utilise le circuit en régime transitoire pour $t \in]0, t_1[$. On applique la loi des mailles :

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{2R}{L} i = \frac{E}{L}$$

On pose alors $boxed\tau_1 = \dfrac{L}{2R}$ et $A_1 = \dfrac{E}{L}$.

---

4. *Résoudre cette équation différentielle. On exprimera i en fonction de E, R, τ_1 et t pour $t \in]0, t_1[$. Vérifier que cette solution est en accord avec la réponse à la question 2.*

Réponse :
La solution générale est la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière :

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) = B_1 \exp(-t/\tau_1) + \frac{E}{2R}$$

On utilise la condition initiale $i(0) = 0$ pour déterminer la constante B_1 :

$$i(0) = 0 = B_1 + \frac{E}{2R} \quad \text{soit} \quad B_1 = -\frac{E}{2R} \quad \text{donc} \quad \boxed{i(t) = \frac{E}{2R}\left(1 - e^{-t/\tau_1}\right) \quad \text{pourt} \in]0; t_1[}$$

Quand on atteint le régime permanent, $\lim_{t \gg \tau_1} i(t) = E/(2R)$, ce qui cohérent avec la réponse à la question 2.

---

5. *Exprimer $u(t)$ pour $t \in]0, t_1[$. Vérifier que cette solution est en accord avec les réponses aux questions 1 et 2.*

Réponse :
On applique la loi des mailles :

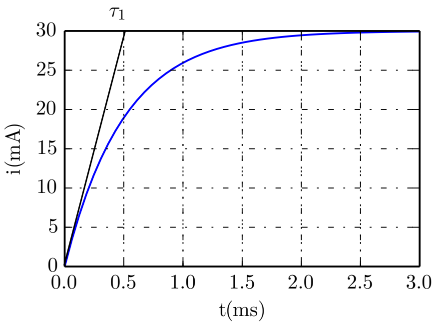
$$u(t) = E - Ri(t) \quad \text{donc} \quad \boxed{u(t) = \frac{E}{2}\left(1 + e^{-t/\tau_1}\right) \quad \text{pourt} \in]0; t_1[}$$

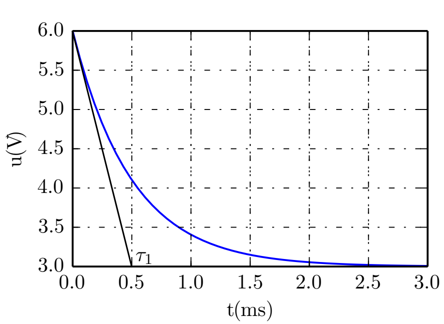
On vérifie que $u(0) = E$.
Quand on atteint le régime permanent, $\lim_{t \gg \tau_1} u(t) = E/2$, ce qui cohérent avec la réponse à la question 2.

---

6. *On enregistre les grandeurs u et i au cours du temps à partir de $t = 0$. Les graphiques sont donnés en annexe. Placer sur ces deux graphiques le temps τ_1. Déterminer les valeurs de E, R et L. Peut-on considérer que le circuit est en régime permanent à l'instant $t = t_1^-$?*

Réponse :
D'après le document annexe, on lit $\boxed{\tau_1 = 0{,}5\,\mathrm{ms} \ll t_1}$, donc on peut considérer que le circuit est en régime permanent à l'instant $t = t_1^-$.
On lit $u(t = 0) = 6\,\mathrm{V}$ et $i(t \gg \tau_1) = 30\,\mathrm{mA}$. Or d'après l'étude théorique, $\boxed{u(t = 0) = E = 6\,\mathrm{V}}$, $i(t \gg \tau_1) = E/2R$, donc $\boxed{R = 100\,\Omega}$. Enfin $\tau_1 = L/2R$, donc $\boxed{L = 0{,}1\,\mathrm{H}}$.





I.B Étude pour $t \in]t_1; t_2[$

7. *En supposant que le régime permanent est atteint à l'instant t_1^-, exprimer $i(t_1^+)$ et $u(t_1^+)$.*

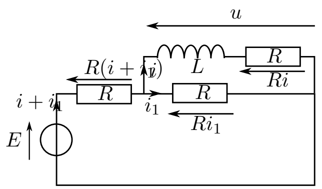
Réponse :

Par continuité du courant circulant à travers une bobine : $\boxed{i(t_1^+) = i(t_1^-) = \frac{E}{2R}}$.

D'après la loi des mailles, avec $u(t_1^+) = Ri_1(t_1^+)$:

$$E = R(i(t_1^+) + i_1(t_1^+)) + u(t_1^+) = Ri(t_1^+) + 2u(t_1^+)$$

$$u(t_1^+) = \frac{E - Ri(t_1^+)}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{u(t_1^+) = \frac{E}{4}}$$



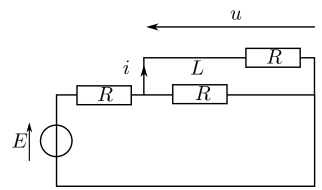
---

8. *En supposant que le régime permanent est atteint à l'instant $t = t_2^-$, exprimer $i(t_2^-)$ et $u(t_2^-)$.*

Réponse :

En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil. Le circuit se résume à un générateur alimentant trois résistances. On associe les deux résistances en parallèle et on applique la formule du pont diviseur de tension :

$$u(t_2^-) = \frac{R/2}{R + R/2}E \quad \text{soit} \quad \boxed{u(t_2^-) = \frac{E}{3}}$$



En appliquant la loi d'Ohm, on trouve le courant i : $\boxed{i(t_2^-) = \frac{E}{3R}}$

---

9. *Établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ pour $t \in]t_1, t_2[$. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :*

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_2}i = A_2$$

Exprimer les constantes τ_2 et A_2 en fonction des données du problème.

Réponse :

On utilise le circuit en régime transitoire pour $t \in]t_1, t_2[$. On exprime la tension u : $u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = Ri_1$

On applique la loi des mailles :

$$E = R(i + i_1) + u = Ri + u + u = Ri + 2L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 2Ri$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{3R}{2L}i = \frac{E}{2L} \quad \text{soit} \quad \boxed{\tau_2 = \frac{2L}{3R} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{E}{2L}}$$

---

10. *Résoudre cette équation différentielle en supposant qu'à l'instant $t = t_1^-$ le circuit est en régime permanent. On exprimera i en fonction de E, R, τ_2 et t pour $t \in]t_1, t_2[$. Vérifier que cette solution est en accord avec la réponse à la question 8.*

Réponse :

La solution est la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière :

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) = B_2 \exp(-t/\tau_2) + \frac{E}{3R}$$

On utilise la condition initiale pour déterminer la constante B_2 :

$$i(t_1) = \frac{E}{2R} = B_2 e^{-t_1/\tau_2} + \frac{E}{3R} \quad \text{soit} \quad B_2 = \frac{E}{6R}e^{t_1/\tau_2}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{6R}\left(2 + e^{-(t-t_1)/\tau_2}\right) \quad \text{pourt } \in]t_1; t_2[}$$

Quand on atteint le régime permanent, $\lim_{(t-t_1)\gg\tau_2} i(t) = E/(3R)$, ce qui cohérent avec la réponse à la question 8

---

11. *Exprimer $u(t)$ pour $t \in]t_1, t_2[$. Vérifier que cette solution est en accord avec la réponse à la question 8.*

Réponse :

$$\boxed{u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = \frac{E}{6}\left[2 - \frac{1}{2}e^{-(t-t_1)/\tau_2}\right]}$$

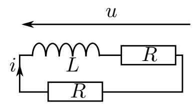
On vérifie que $u(t_1) = E/4$.

Quand on atteint le régime permanent, $\lim_{(t-t_1)\gg\tau_2} u(t) = E/3$, ce qui cohérent avec la réponse à la question 8.

I.C Étude pour $t \in]t_2 ; +\infty[$

12. *En supposant que le régime permanent est atteint à l'instant t_2^-, exprimer $i(t_2^+)$ et $u(t_2^+)$.*

Réponse :



La branche contenant le générateur est ouverte. Elle n'a donc aucune influence sur le circuit. Je ne la représente pas.
Par continuité du courant circulant à travers une bobine : $\boxed{i(t_2^+) = i(t_2^-) = \dfrac{E}{3R}}$.

En appliquant la loi d'Ohm : $\boxed{u(t_2^+) = -\dfrac{E}{3}}$

---

13. *Exprimer i et u pour $t \to +\infty$.*

Réponse :
En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil. Le circuit se résume à deux résistances sans alimentation. Donc $\boxed{i(+\infty) = 0 \quad \text{et} \quad u(+\infty) = 0}$

---

14. *Établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ pour $t \in]t_2, +\infty[$. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :*

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_3} i = A_3$$

Exprimer les constantes τ_3 et A_3 en fonction des données du problème.

Réponse :
On utilise le circuit en régime transitoire pour $t \in]t_2, +\infty[$. On applique la loi des mailles

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 2Ri = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{di}{dt} + \frac{2R}{L} i = 0$$

On pose $\boxed{\tau_3 = \dfrac{L}{2R} \quad \text{et} \quad A_3 = 0}$.

---

15. *Résoudre cette équation différentielle en supposant qu'à l'instant $t = t_2^-$ le circuit est en régime permanent. On exprimera i en fonction de E, R, τ_3 et t pour $t \in]t_2, +\infty[$.*

Réponse :
L'équation à résoudre est une équation homogène. La solution générale est $i(t) = B_3 \exp(-t/\tau_3)$.
On utilise la condition initiale pour déterminer la constante B_3 :

$$i(t_2) = \frac{E}{3R} = B_2 e^{-t_2/\tau_2} \quad \text{soit} \quad \boxed{i(t) = \frac{E}{3R} e^{-(t-t_2)/\tau_3} \quad \text{pour} t \in]t_2; +\infty[}$$

---

16. *Exprimer $u(t)$ pour $t \in]t_2, +\infty[$.*

Réponse :
Par la loi d'Ohm :

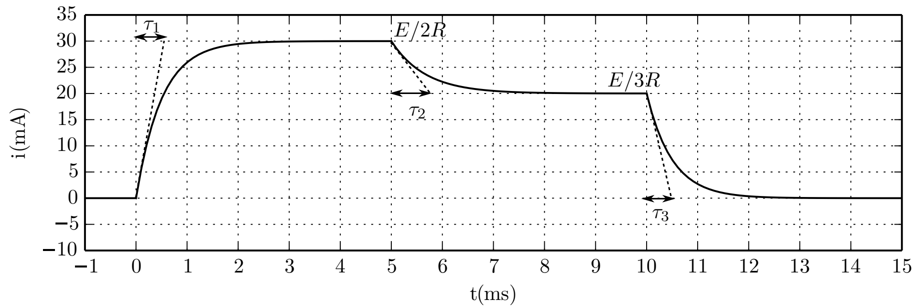
$$\boxed{u(t) = -Ri = -\frac{E}{3} e^{-(t-t_2)/\tau_3} \quad \text{pour} t \in]t_2; +\infty[}$$

---

17. *Tracer l'allure de i en fonction du temps, pour $t \in]0; +\infty[$ sur le graphique en annexe. On fera apparaitre les constantes de temps τ_1, τ_2 et τ_3 sur ce graphique, ainsi que les valeurs de i à chaque changement de régime.*

Réponse :
On calcule les temps :

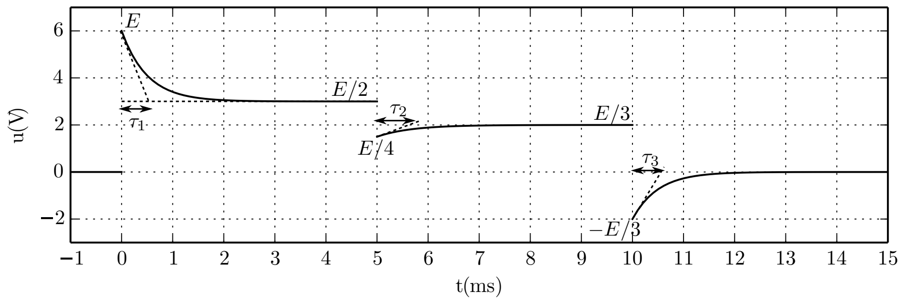
$$\tau_3 = \tau_1 = 0{,}5\,\text{ms} \quad ; \quad \tau_2 = 4\tau_1/3 = 0{,}66\,\text{ms}$$



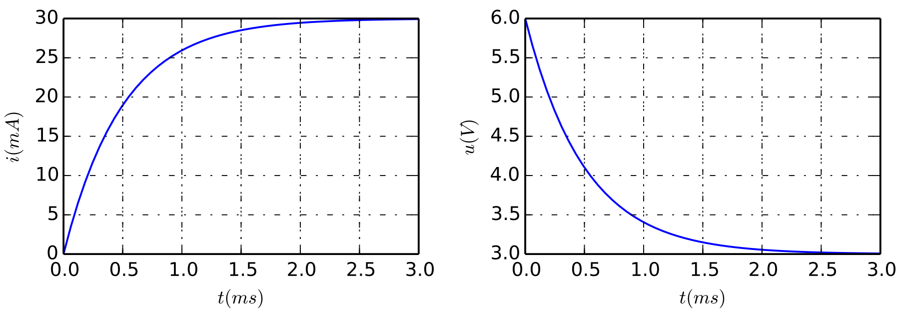
---

18. *Tracer l'allure de u en fonction du temps, pour $t \in]0; +\infty[$ sur le graphique en annexe. On fera apparaitre les constantes de temps τ_1, τ_2 et τ_3 sur ce graphique, ainsi que les valeurs de u à chaque changement de régime.*

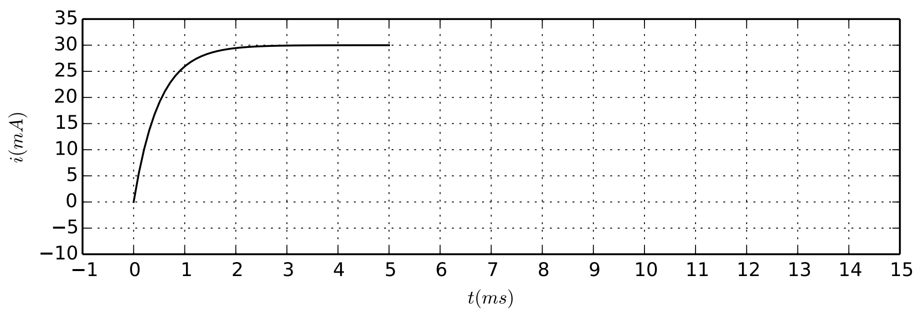
Réponse :



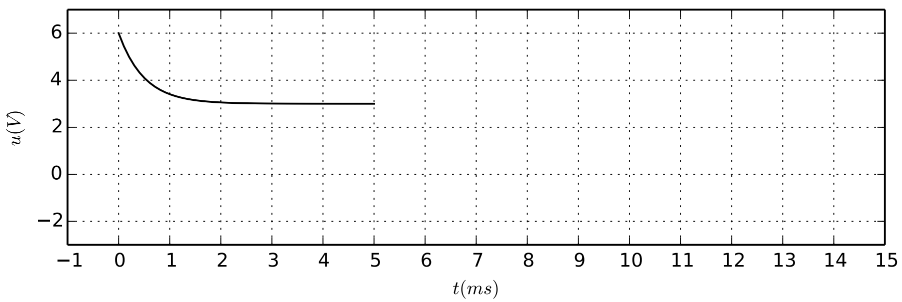
Pour la question 6



Pour la question 17



Pour la question 18



II Unité de cellules photovoltaïques

Une utilisation de l'énergie solaire est la production d'énergie électrique par des cellules photovoltaïques. Ce problème étudie le fonctionnement d'un ensemble de cellules pouvant venir en complément d'autres dispositifs.

L'énergie pourra être stockée dans des batteries d'accumulateurs et restituée à une installation domestique par l'intermédiaire d'un onduleur.

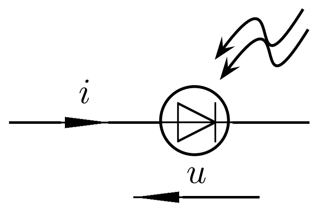
Les deux parties de ce problème sont totalement indépendantes.

II.A Cellules photovoltaïques

Aucune connaissance préalable sur les cellule photovoltaïque, dont le symbole est représenté figure ci-contre, n'est nécessaire pour résoudre cette partie.

Le comportement d'une cellule photovoltaïque est bien représenté par la fonction caractéristique

$$i = I_s\left[\exp\left(\frac{u}{U_0}\right) - 1\right] - \alpha S E$$



avec $I_s = 0{,}10\,\mathrm{nA}$; $U_0 = 25{,}8\times10^{-3}\,\mathrm{V}$; $S = 12\,\mathrm{cm}^2$ et $\alpha = 0{,}35\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{W}^{-1}$ où α est le coefficient représentant les pertes, S la surface de la cellule et E l'éclairement solaire.

1. *Ce dipôle est-il symétrique/polarisé ? actif/passif ? linéaire/non-linéaire ? Justifier à l'aide de l'équation constitutive.*

   Réponse :
   Il s'agit d'un dipôle non-linéaire (la relation constitutive n'est pas une équation linéaire), polarisé (si on change i en $-i$ et u en $-u$ la relation n'est pas la même (dit autrement la caractéristique n'est pas symétrique par rapport à O) et actif dès lors que l'éclairement est non nul. (i ne vaut pas 0 lorsque u vaut 0).

Lorsque le flux solaire est maximal, l'éclairement vaut $E_1 = 800\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$. Par ciel voilé l'éclairement vaut $E_2 = 300\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$ et par temps gris, $E_3 = 100\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$.

2. *Calculer la tension aux bornes d'une cellule quand elle n'est pas branchée ($i = 0$) pour les trois éclairements E_1, E_2 et E_3. On notera U_{C1}, U_{C3} et U_{C3} ces trois tensions à vide.*

   Réponse :
   En circuit ouvert $i = 0$, $u = U_C$ et la relation donnée par l'énoncé s'écrit

$$0 = I_s\left[\exp\left(\frac{U_C}{U_0}\right) - 1\right] - \alpha S E \Rightarrow \boxed{U_C = U_0 \ln\left[1 + \frac{\alpha S E}{I_s}\right]}$$

   Les applications numériques donnent :

Éclairements	$E_1 = 800$ W.m^{-2}	$E_2 = 300$ W.m^{-2}	$E_3 = 100$ W.m^{-2}
Tensions en circuit ouvert	$U_{C1} = 0,57$ V	$U_{C2} = 0,54$ V	$U_{C3} = 0,51$ V
Intensités de court circuit	$i_{cc1} = -0,34$ A	$i_{cc2} = -0,13$ A	$i_{cc3} = -0,04$ A

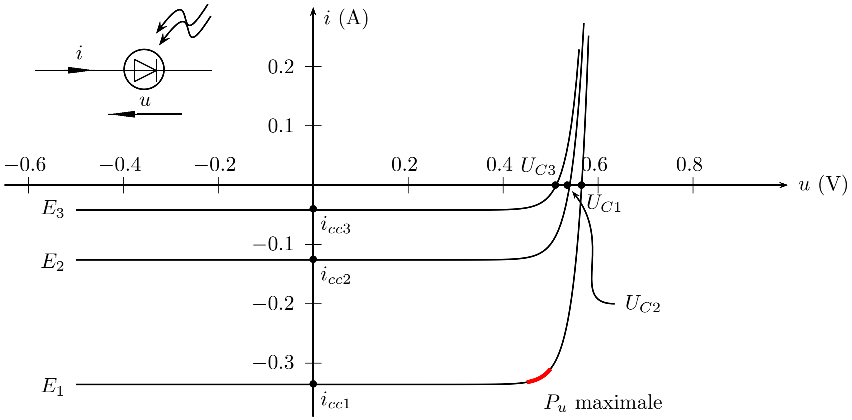
---

3. *Calculer numériquement i_{cc} le courant de court-circuit (pour $u = 0$) pour les trois éclairements, on les notera i_{cc1}, i_{cc2} et i_{cc3}.*

   Réponse :
   valeurs sur le tableau précédent.

4. *Tracer l'allure des trois caractéristiques sur lesquelles on fera apparaître les points remarquables.*

Réponse :
L'allure des trois caractéristiques correspond à des exponentielles croissantes :



5. *Déterminer l'expression de la puissance fournie P_u par la cellule.*

Réponse :
La cellule est orientée selon la convention d'orientation récepteur et par conséquent, la puissance **fournie** est

$$\boxed{P_u = -u.i = u\left[\alpha SE - I_s\left(\exp\left(\frac{u}{U_0}\right) - 1\right)\right]}$$

On remarque que $u.i < 0$, c'est-à-dire $P_u > 0$ pour $0 < u < U_C$ (quart de plan inférieur droit sur la figure), ce sera le domaine dans lequel il faudra se placer pour que la cellule fournisse effectivement de l'énergie au reste du circuit.

Pour la suite, on envisagera le cas où le flux solaire est maximal $E_1 = 800\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$. On cherche les conditions pour que la puissance P_u soit maximale.

On admettra que dans ces conditions on a : $\exp\frac{u}{U_0} \gg 1$.

6. *Établir la relation permettant de calculer $u_{\max}$, valeur de u lorsque P_u est maximale. Cette équation n'est pas à résoudre analytiquement*

Réponse :
Graphiquement, on peut déjà remarquer que P_u est maximale "dans le coude" de la caractéristique précédente (Cf figure pour $E = E_1$).
Pour déterminer $u_{\max}$ avec précision, sachant qu'il s'agit de la valeur de u pour laquelle P_u est maximale, on utilise le fait que pour cette valeur de u, la fonction $P_u(u)$ admet un extremum (maximum) et par conséquent, $\frac{dP_u}{du} = 0$ en $u = u_{\max}$. On utilise une expression simplifiée de $P_u(u)$ avant d'effectuer la dérivation. En effet, $P_u = \alpha SEu - uI_s[\exp(\frac{u}{U_0}) - 1] \simeq \alpha SEu - uI_s \exp\frac{u}{U_0}$ et

$$\frac{dP_u}{du} = 0 \Rightarrow \alpha SE - I_s \exp\frac{u_{\max}}{U_0} - \frac{u_{\max} I_s}{U_0}\exp\frac{u_{\max}}{U_0} = 0 \Rightarrow \boxed{[1 + \frac{u_{\max}}{U_0}].\exp\frac{u_{\max}}{U_0} = \frac{\alpha SE}{I_s}}$$

7. *Résoudre cette équation numériquement à l'aide d'un script en python (le script est à reproduire sur votre copie) puis calculer la valeur de l'intensité i_{Max} correspondante.*

Réponse :
Par une méthode numérique, on trouve $u_{\mathrm{Max}} = 0{,}490\,\mathrm{V}$.
Connaissant $u_{\max}$, on en déduit $\boxed{i_{\mathrm{Max}} = I_s\left[\exp\left(\frac{u_{\max}}{U_0}\right) - 1\right] - \alpha SE \simeq -0{,}32\,\mathrm{A}}$ ce qui, encore une fois, est en accord avec la caractéristique.

8. *On branche aux bornes de la cellule une résistance R. Quelle valeur faut-il donner à la résistance R pour que ces conditions soient réalisées ?*

Réponse :
On branche un résistor en parallèle de façon à mettre en concordance $u_{\max}$ et $i_{\max}$.
En reprenant les notations de l'énoncé, le résistor est en convention générateur et la loi d'Ohm s'écrit alors $u = -Ri$ et ici $\boxed{R = -\frac{u_{\max}}{i_{\max}} = -\frac{0,490}{0,32} \simeq 1{,}53\,\Omega}$

On définit le rendement η de la cellule comme étant le rapport de la puissance maximale sur la puissance solaire reçue par toute la surface de la cellule.

9. *Écrire l'expression de η. Faire l'application numérique puis commenter.*

Réponse :
L'énoncé définit le rendement η de la cellule comme le rapport de la puissance maximale $P_{\max}$ sur la puissance solaire P_s reçue par toute la surface de la cellule.
Or l'éclairement E s'exprime en $\mathrm{W.m^{-2}}$, il s'agit donc d'une puissance par unité de surface.
Cette analyse dimensionnelle permet de d'écrire $P_s = SE$ et

$$\boxed{\eta = \frac{P_{\max}}{P_s} \simeq \frac{u_{\max}[\alpha SE - I_s \exp\frac{u_{\max}}{U_0}]}{SE} = u_{\max}\left[\alpha - \frac{I_S}{SE}\exp\frac{u_{\max}}{U_0}\right] \simeq 0,16}$$

La valeur du rendement n'est que de $\boxed{\text{16 \%, c'est assez faible}}$ et c'est pourquoi on est amené à associer un nombre important de cellules. Il faudra néanmoins s'arranger pour maintenir $P_u = P_{\max}$ pour chaque cellule.

Dans le but d'améliorer les performances du dispositif, on cherche à associer les cellules en série et en parallèle. On met ainsi en parallèle n_p branches identiques constituées de n_s cellules en série.
On prendra $n_s = 50$ et $n_p = 25$.

10. *Exprimer la tension V_D aux bornes du système et l'intensité I_D qui le traverse si chaque cellule fournit sa puissance maximale. Effectuer les applications numériques.*

Réponse :
Lorsqu'une cellule fournit un maximum de puissance, la tension à ses bornes est $u_{\max}$ et l'intensité qui la traverse $i_{\max}$. On associe n_p branches en parallèle, chaque branche contenant n_s cellules en série.
La tension aux bornes de chaque branche est, par additivité des tensions, $\boxed{V_D = n_s.u_{\max} \simeq 24{,}4\,\mathrm{V}}$.
Chacune de ces branches est traversée par un courant d'intensité $i_{\max}$ et la loi des noeuds implique que le courant qui traverse l'ensemble est $\boxed{I_D = n_p.i_{\max} \simeq -8{,}0\,\mathrm{A}}$.
Remarque : la puissance utile est alors $P_u = -V_D.I_D = 195\,\mathrm{W}$.

11. *Déterminer numériquement la valeur R_M de la résistance à brancher aux bornes du capteur solaire ainsi constitué pour que la condition de puissance maximale soit réalisée.*

Réponse :
On obtient (loi d'Ohm en convention générateur), $\boxed{R_M = -\frac{V_D}{I_D} \simeq 3{,}1\,\Omega}$.

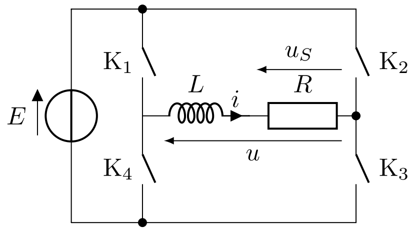
12. *On suppose maintenant que le capteur solaire n'alimente plus une résistance mais charge une batterie de résistance interne négligeable de 24 V. Quelle est la tension observée aux bornes de chaque cellule ? Quel courant traverse alors une cellule et la batterie ? Effectuer les applications numériques.*

Réponse :
C'est maintenant la batterie qui impose la tension $U_b = 24\,\mathrm{V}$ aux bornes de l'association, c'est-à-dire aux bornes de chaque branche constituée de n_s cellules.
On en déduit $\boxed{u = \frac{U_b}{n_s} \simeq 0{,}48\,\mathrm{V} \text{ et } i = I_s[\exp\frac{u_{\max}}{U_0} - 1] - \alpha SE \simeq -0{,}32\,\mathrm{A}}$ et enfin l'intensité qui traverse la batterie est $\boxed{I_b = n_p.i \simeq -8{,}1\,\mathrm{A}}$.
Remarque : les valeurs de i et u sont proches de $u_{\max}$ et $i_{\max}$, le type de cellule est donc bien adaptée à la batterie (ou inversement).

II.B Étude de l'onduleur

Cette partie étudie un onduleur de tension autonome à commande symétrique ou décalée. Un onduleur est un convertisseur de tension continue en tension alternative. Le montage est celui représenté sur la figure ci-contre.

Le générateur est une source de tension idéale de force électromotrice E constante. L est une inductance pure dite de lissage et R représente "la charge" c'est-à-dire ce qui se trouve en aval du circuit. Cette dernière est modélisée par un résistor de résistance R.

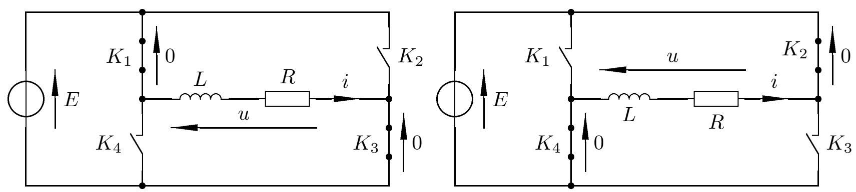


Les quatre interrupteurs bidirectionnels K_1, K_2, K_3 et K_4 sont commandés électriquement de telle façon que :

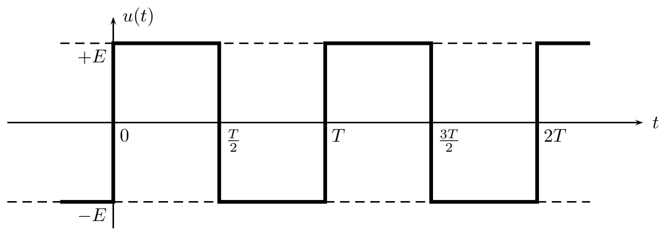
Pour $nT < t < (n+1/2)T$	K_1 et K_3 sont fermés	K_2 et K_4 ouverts
Pour $(n+1/2)T < t < (n+1)T$	K_1 et K_3 sont ouverts	K_2 et K_4 fermés

13. *Tracer la courbe $u(t)$ en indiquant les points remarquables.*

Réponse :
Pour $nT < t < (n+1/2)T$, on obtient le circuit ci-dessous à gauche. L'application d'une loi des mailles qui passe par le générateur, les interrupteurs K_1 et K_3 fermés (la tension à leurs bornes est alors nulle) et l'inductance donne $E - 0 - u - 0 = 0 \Rightarrow u = E$.



De même, pour $(n+1/2)T < t < (n+1)T$ (circuit ci-dessus à droite), la loi des maille passant par le générateur et les deux interrupteurs K_2 et K_4 fermé s'écrit $E - 0 + u - 0 = 0 \Rightarrow u = -E$.
On en déduit le graphe représenté ci-dessous.



On a ainsi produit un signal créneau de période T.

14. *Écrire l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$, courant circulant dans R.*

Réponse :
À tout instant t, on peut écrire $u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + Ri(t)$ et en utilisant le résultat de la question précédente, on en déduit :

- pour $nT < t < (n+1/2)T$ $u = E \Rightarrow L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + Ri(t) = E$ et
- pour $(n+1/2)T < t < (n+1)T$ $u = -E \Rightarrow L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + Ri(t) = -E$.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{i(t)}{\tau} = \pm\frac{E}{L}}$$

avec $\tau = \frac{L}{R}$ la constante de temps du circuit.

15. *Si $i_1(t)$ est la solution de cette équation pour $0 < t < T/2$ et $i_2(t)$ la solution de cette équation pour $T/2 < t < T$, déterminer les expressions de $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en fonction de R, L et E et en fonction de deux constantes d'intégration A_1 et A_2 que l'on ne cherchera pas à calculer pour l'instant. Pour cela, on posera $\tau = \frac{L}{R}$.*

Réponse :
La solution de ce type d'équation différentielle du premier ordre à coefficients constants (tous de même signe) est la somme de la solution de l'équation sans second membre $A.\exp(-\frac{t}{\tau})$ et d'une solution particulière de même nature que le second membre : une constante B ici telle que $\frac{B}{dt} + \frac{B}{\tau} = \pm\frac{E}{L} \Rightarrow B = \pm\frac{\tau E}{L} = \pm\frac{E}{R}$.
On en déduit

$$\boxed{i_1(t) = \frac{E}{R} + A_1.e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{et} \quad i_2(t) = -\frac{E}{R} + A_2.e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

On se place en régime établi (ici, les grandeurs électriques ne seront pas constantes au cours du temps) et on cherche à déterminer les valeurs de A_1 et A_2.
On pose de plus $\alpha = \exp\left[-\frac{T}{2\tau}\right]$.

16. *Écrire la "condition de raccordement" pour le courant en $t = T/2$ (c'est-à-dire la relation liant $i(T^-/2)$ à $i(T^+/2)$) ; justifier.*

Réponse :
Par continuité de l'intensité du courant qui traverse L, $i(T^-/2)$ est égal à $i(T^+/2)$ d'où ici

$$i_1\left(\frac{T}{2}\right) = i_2\left(\frac{T}{2}\right) \Rightarrow \frac{E}{R} + A_1.e^{-\frac{T}{2\tau}} = -\frac{E}{R} + A_2.e^{-\frac{T}{2\tau}} \Rightarrow \frac{E}{R} + \alpha A_1 = -\frac{E}{R} + \alpha A_2 \Rightarrow \boxed{A_1 = A_2 - \frac{2E}{\alpha R}}$$

On obtient ainsi une première équation entre A_1 et A_2.

17. *En écrivant que le courant est périodique, écrire une seconde relation entre A_1 et A_2. Résoudre le système ainsi trouvé.*

Réponse :
L'intensité $i(t)$ est une fonction périodique de période T et par exemple, $i(0) = i(T)$ d'où ici,

$$i_1(0) = i_2(T) \Rightarrow \frac{E}{R} + A_1 = -\frac{E}{R} + A_2.e^{-\frac{T}{\tau}} = -\frac{E}{R} + \alpha^2 A_2 \Rightarrow \boxed{A_1 = \alpha^2 A_2 - \frac{2E}{R}}$$

Reste à résoudre le système de deux équations précédent. Par identification, on obtient

$$A_2 - \frac{2E}{\alpha R} = \alpha^2 A_2 - \frac{2E}{R} \Rightarrow A_2 = -\frac{2E}{R}\frac{1-\frac{1}{\alpha}}{1-\alpha^2} = -\frac{2E}{R}\frac{(\alpha-1)/\alpha}{(1-\alpha)(1+\alpha)} \tag{II.1}$$

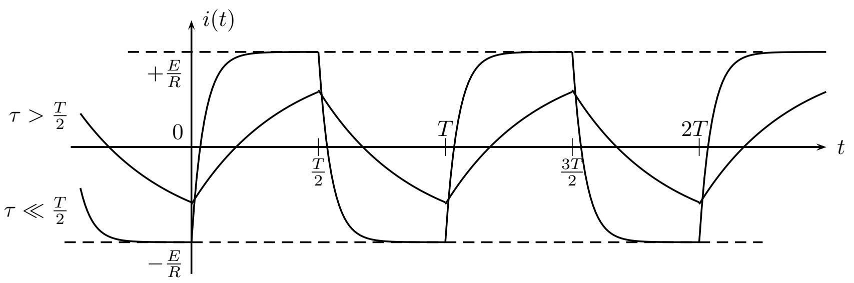
$$\Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{2E}{\alpha(1+\alpha)R} \text{ et} A_1 = \frac{-2E}{(1+\alpha)R}} \tag{II.2}$$

18. *Exprimer $i_1(t)$ et $i_2(t)$. Tracer le graphe $i(t)$ en faisant apparaître les points remarquables.*

Réponse :
En remplaçant A_1 et A_2 dans l'expression de $i_1(t)$ et $i_2(t)$, on en déduit :

$$\boxed{i_1(t) = \frac{E}{R}\left[1 - \frac{2}{1+\alpha}e^{-\frac{t}{\tau}}\right]} \quad \text{et} \quad \boxed{i_2(t) = -\frac{E}{R}\left[1 - \frac{2}{\alpha(1+\alpha)}e^{-\frac{t}{\tau}}\right]}$$

i_1 et i_2 vont tendre exponentiellement vers $\pm\frac{E}{R}$ avec la constante de temps τ en tout cas si u ne passe pas de $\pm E$ à son opposé avant.



On obtiendra ainsi différentes formes selon la valeur du rapport τ sur $\frac{T}{2}$. Après Filtrage, on peut ensuite obtenir un courant sinusoïdal.