

Physique - Devoir Maison 08

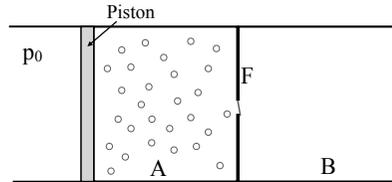
28/04/2025

Corrigé

Ce premier exercice n'est pas simple, mais très court ; Prenez votre temps et essayez de faire bien les choses. Comme d'habitude en thermodynamique, il ne faut rien laisser au hasard et tout justifier.

I Détente d'un gaz parfait

Un cylindre horizontal est fermé à l'une de ses extrémités par une paroi fixe et à l'autre l'extrémité par un piston qui peut coulisser sans frottement le long du cylindre. Le cylindre est séparé en deux compartiments A et B par une paroi fixe F. Sur la face extérieure du piston s'exerce la pression atmosphérique p_0 que l'on suppose uniforme et constante.



1. Dans la situation initiale le compartiment A de volume $V_A = V_0$ contient un gaz parfait diatomique (coefficient γ) à température T_0 , le compartiment B de volume V_B est vide. Exprimer le nombre n de moles dans le cylindre.

Réponse :

Equilibre mécanique donc $P_{\text{int}} = p_0 \Rightarrow n = \frac{p_0 V_0}{RT_0}$

I.A Première transformation

Les parois du cylindre et le piston sont imperméables à la chaleur et de capacités calorifiques négligeables. On perce un orifice dans la paroi fixe F. Le volume V_B est suffisamment grand pour que la pression finale soit inférieure à p_0 .

2. Justifier rigoureusement que le volume V_A sera nul à l'équilibre.

Réponse :

Si la pression reste inférieure à p_0 , le piston est hors équilibre sauf s'il est bloqué ce qui arrive lorsque piston arrive en bout de course soit $V_A = 0$.

3. Exprimer par deux méthodes différentes le travail W_1 échangé avec l'extérieur par le gaz. En déduire que la température finale T_1 s'exprime selon :

$$T_1 = \gamma T_0$$

Réponse :

Ce qui compte pour le calcul de la force de pression, c'est le volume balayé par le piston. Le GP va passer du volume V_A au volume V_B mais le piston va lui, balayer uniquement le volume V_A (et non $V_A - V_B$). On a donc $W_1 = -\int_{V_0}^0 p_{\text{ext}} dV = -p_0(0 - V_0) = p_0 V_0$.

En effet, l'expression du travail de la force de pression s'établit à l'aide d'un calcul mécanique. Pour le piston, on a :

$$W_p = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F}_p \cdot \vec{dl} = P_{\text{ext}} \underbrace{S(x_f - x_i)}_{=V_{A,i}=V_0} = p_0 V_0$$

On peut aussi appliquer le premier principe avec $Q = 0$ (parois calorifugées) : $\Delta U = W_1 + 0 \Rightarrow W_1 = n \frac{R}{\gamma-1} (T_1 - T_0)$. L'égalité de ces termes implique :

$$T_1 = T_0 + \frac{p_0 V_0}{nR} (\gamma - 1) = \gamma T_0$$

4. Exprimer ensuite la pression finale p_1 du gaz et le volume minimal $V_B = V_{Bm}$ pour que la pression finale reste inférieure à p_0 .

Réponse :

On en déduit pour la pression $p_1 = nRT_1/V_B = nR\gamma T_0/V_B \Rightarrow p_1 = p_0 \gamma \frac{V_0}{V_B}$. Cette pression est inférieure à p_0 tant que $V_B > V_{Bm} = \gamma V_0$

I.B Deuxième transformation

On revient aux conditions initiales, les parois du cylindre et le piston étant toujours imperméables à la chaleur et de capacités calorifiques négligeables.

V_B est maintenant inférieur à V_{Bm} et la pression finale du gaz sera p_0 après avoir percé l'orifice.

5. Calculer par deux méthodes différentes le travail W_2 échangé avec l'extérieur par le gaz. En déduire la température finale T_2 .

Réponse :

Dans ce cas, le volume V_A sera non nul et on obtiendra aussi un équilibre mécanique en fin de transformation ($p_2 = p_0$). La conservation de la quantité de matière donne :

$$n = \frac{p_0 V_0}{RT_0} = \frac{p_0 (V_B + V_{Af})}{RT_2} \Rightarrow \frac{V_0}{T_0} = \frac{V_B + V_{Af}}{T_2}$$

Un calcul direct du travail donne :

$$W_2 = -\int p_{\text{ext}} dV = -p_0 (V_{Af} - V_0)$$

Tandis que l'application du premier principe permet d'écrire :

$$\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1} (T_2 - T_0) = W_2 + 0$$

On peut finalement combiner ces résultats pour obtenir :

$$p_0 (V_0 - V_{Af}) = \frac{p_0 V_0}{RT_0} \frac{R}{\gamma-1} (T_2 - T_0) \quad (I.1)$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{V_{Af}}{V_0}\right) = \frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{T_2}{T_0} - 1\right) \Rightarrow \left(1 - \frac{T_2}{T_0} + \frac{V_B}{V_0}\right) = \frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{T_2}{T_0} - 1\right) \quad (I.2)$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_0} \left(\frac{1}{\gamma-1} + 1\right) = \frac{1}{\gamma-1} + \frac{V_B}{V_0} + 1 \quad (I.3)$$

$$\Rightarrow T_2 = T_0 \left(1 + \frac{V_B}{V_0} \times \frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \quad (I.4)$$

I.C Troisième transformation

6. On revient une dernière fois aux conditions initiales et cette fois, on bloque le piston. Que se passe-t-il lorsque l'on perce l'orifice ? Conclusions.

Réponse :

Lorsque le piston est bloqué, on est en présence de la détente de Joule Gay-Lussac pour laquelle $T_3 = T_0$ (application du premier principe avec $W = Q = 0$) et $\Delta S = S_c = nR \ln(1 + \frac{V_B}{V_0})$

II Désaimantation adiabatique

II.A Structure d'un sel paramagnétique : l'alun de chrome potassium

La formule chimique de l'alun de chrome potassium est $\text{KCr}(\text{SO}_4)_2$.

1. Le potassium K et le chrome Cr se situent dans la 4^e période et respectivement dans la 1^{re} et 6^e colonne de la classification périodique des éléments. Quels sont les numéros atomiques du potassium et du chrome ? Justifier.

Réponse :

La première ligne contient 2 éléments, la deuxième et la troisième 8, le numéro atomique du potassium est donc $Z(K) = 2 + 8 + 8 + 1 = 19$ et celui du chrome $Z(Cr) = 2 + 8 + 8 + 6 = 24$

2. À quelle famille le potassium appartient-il ? Quel ion est-il susceptible de former ?

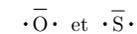
Réponse :

Le potassium est un élément de la première colonne, celle des alcalins, qui perd facilement un électron pour avoir la structure électronique stable du gaz rare de la ligne précédente. Le cation alors formé par le potassium est K^+ .

3. Quelles sont les structures électroniques de l'atome d'oxygène O ($Z = 8$) et de l'atome de soufre S ($Z = 16$) ? En déduire leurs représentations de LEWIS.

Réponse :

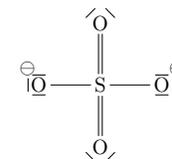
La structure de électronique de O est $1s^2 2s^2 2p^4$, et celle de S $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$. Les 2 ont donc 6 électrons de valence, et donc des configuration de LEWIS semblables :



4. Dans l'ion SO_4^{2-} , l'atome de soufre est central. Il possède 2 liaisons doubles et 2 liaisons simples avec les atomes d'oxygène. Quelle est la représentation de LEWIS de SO_4^{2-} ? On pensera à représenter les charges formelles.

Réponse :

L'indication de l'énoncé permet de savoir que le soufre est hypervalent et ne vérifie pas la règle de l'octet dans l'ion sulfate, chacun de ses 6 électrons de valence est mis en jeu dans une liaison. On en déduit la structure de LEWIS :



II.B Réfrigération par désaimantation adiabatique : effet magnétocalorique

La réfrigération par désaimantation adiabatique consiste à faire subir des cycles d'aimantation (augmentation puis diminution du champ magnétique) à un sel paramagnétique. On observe une variation de la température T du sel lors de la variation du champ magnétique B : c'est l'effet magnétocalorique illustré pour un cycle thermodynamique sur la figure II.1. Ce sel, une fois refroidi, est alors mis en contact temporairement avec le capteur à réfrigérer avant de subir un nouveau cycle d'aimantation. Les équations mises en jeu lors de la transformation de l'état (3) à (4) sont, d'un point de vue théorique, analogue à la détente adiabatique d'un gaz parfait.

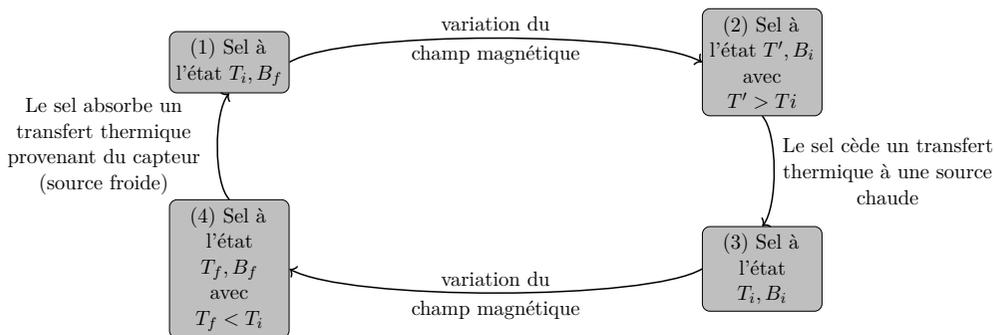


FIGURE II.1 – Cycle de réfrigération par désaimantation adiabatique

II.B.1 Fonction d'état d'un gaz parfait

5. Rappeler la relation de MAYER. Le coefficient isentropique du gaz parfait est $\gamma = C_p/C_v$. Exprimer C_p et C_v en fonction de n , R et γ .

Réponse :

La relation de MAYER pour un gaz parfait s'écrit : $C_p - C_v = nR$. En combinant cela avec la définition de γ ,

$$\text{on obtient } C_v = \frac{1}{\gamma - 1} nR \text{ et } C_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} nR$$

6. D'après la première loi de JOULE pour un gaz parfait, quelle est l'expression de dU en fonction de T , n , R et γ ?

Réponse :

Pour un gaz vérifiant la première loi de JOULE, et c'est le cas des gaz parfaits, l'énergie interne U ne dépend que d'une variable, la température. On peut alors écrire $dU = C_v dT = \frac{1}{\gamma - 1} nR dT$

7. À l'aide du premier principe, montrer que le transfert thermique reçu par le gaz parfait s'écrit $\delta Q = C_v dT + P dV$ au cours d'une évolution infinitésimale d'une transformation quasistatique.

Réponse :

Le premier principe permet d'écrire $dU = \delta W + \delta Q$ sur une évolution infinitésimale. Le travail élémentaire reçu par le gaz parfait s'écrit $\delta W = -P_{\text{ext}} dV$. Une transformation quasistatique parcourant une succession d'état d'équilibre, l'équilibre mécanique est vérifié, et la pression extérieure est celle du gaz parfait, $P_{\text{ext}} = P$. En combinant avec ce qui a été dit à la question précédente, $dU = C_v dT = -P dV + \delta Q$ permet bien d'établir

$$\delta Q = C_v dT + P dV.$$

II.B.2 Transformation adiabatique d'un gaz parfait

Nous étudions une transformation adiabatique du gaz parfait de l'état initial (T_i, V_i) à l'état final (T_f, V_f) .

8. À l'aide des résultats précédents, exprimer le rapport T_f/T_i en fonction de V_i , V_f et γ . Que peut-on dire du rapport T_f/T_i si le gaz subit une détente ?

Réponse :

Pour une transformation adiabatique, $\delta Q = 0$, et le résultat de la question précédente devient $C_v dT + P dV = 0$. En y injectant l'expression de C_v établie à partir de la relation de MAYER et $P = nR \frac{T}{V}$ issu de l'équation des gaz parfaits, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma - 1} dT + \frac{T}{V} dV &= 0 \\ \frac{dT}{T} &= (1 - \gamma) \frac{dV}{V} \\ \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} &= (1 - \gamma) \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} \\ \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) &= (1 - \gamma) \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \\ \frac{T_f}{T_i} &= \left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{1-\gamma} \end{aligned}$$

Si le gaz subit une détente, le volume final est plus grand que le volume initial, $\frac{V_f}{V_i} > 1$, et comme $1 - \gamma < 0$, $\frac{T_f}{T_i} < 1$, la température du système diminue.

II.B.3 Désaimantation adiabatique d'un sel paramagnétique

L'état du sel paramagnétique est caractérisé par les deux variables température T et champ magnétique B . L'ensemble des fonctions d'état caractérisant le sel dépendent de ces deux variables.

Par analogie avec le gaz parfait, au cours d'une transformation infinitésimale la quantité de chaleur reçue par le sel se met sous la forme $\delta Q = C_B dT + g dB$.

On montre que $C_B(T, B) = \frac{\alpha B^2 + \beta}{T^2}$ et $g(T, B) = -\frac{\alpha B}{T}$, où α et β sont deux constantes positives.

Nous étudions la transformation adiabatique réversible du sel de l'état initial (T_i, B_i) à l'état final (T_f, B_f) correspondant au passage de l'état (3) à l'état (4) sur la figure II.1.

9. Montrer qu'au cours de la transformation la variation de champ magnétique dB est reliée à la variation de température dT par la relation :

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2} \frac{d(\alpha B^2)}{\alpha B^2 + \beta}$$

Réponse :

Pour une transformation adiabatique, $\delta Q = 0$, et donc $0 = C_B dT + g dB$. On injecte dans cette relation les expressions de C_B et de g :

$$\begin{aligned} C_B dT &= -g dB \\ \frac{\alpha B^2 + \beta}{T^2} dT &= \frac{\alpha B}{T} dB \\ \frac{dT}{T} &= \frac{\alpha B}{\alpha B^2 + \beta} dB \\ \text{et avec : } d(\alpha B^2) &= 2\alpha B dB \\ \frac{dT}{T} &= \frac{1}{2} \frac{d(\alpha B^2)}{\alpha B^2 + \beta} \end{aligned}$$

10. Par intégration, en déduire l'expression $\frac{T_f}{T_i}$ en fonction de α , β , B_i et B_f . Comment doit varier le champ magnétique B pour diminuer la température T du sel au cours d'une transformation adiabatique ?

Réponse :

On intègre l'expression donnée comme proposé entre l'état initial et l'état final, par exemple en posant le changement de variable $X = \alpha B^2 + \beta$, $dX = d(\alpha B^2)$, et X varie de $X_i = \alpha B_i^2 + \beta$ à $X_f = \alpha B_f^2 + \beta$:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{T} &= \frac{1}{2} \frac{d(\alpha B^2)}{\alpha B^2 + \beta} \\ \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} &= \frac{1}{2} \int_{X_i}^{X_f} \frac{dX}{X} \\ \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{X_f}{X_i}\right) \\ \frac{T_f}{T_i} &= \sqrt{\frac{\alpha B_f^2 + \beta}{\alpha B_i^2 + \beta}}\end{aligned}$$

Pour diminuer la température, $\alpha B^2 + \beta$ doit diminuer, comme $\alpha > 0$, l'intensité du champ magnétique doit diminuer.
