

Physique - Devoir Maison 07
17/03/2025

Corrigé

I Métro gravitationnel

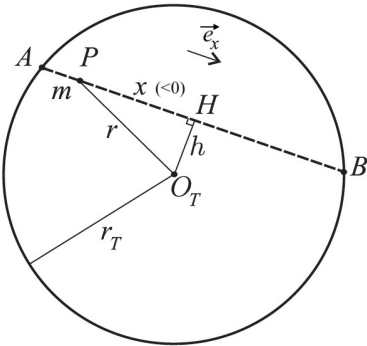
On peut montrer que, pour tout point M de masse m , situé à l'intérieur de la Terre à la distance r du centre O de la Terre, l'attraction terrestre est une force agissant sur ce point, dirigée vers le centre de la terre et de valeur :

$$\vec{F} = -mg_0 \frac{r}{R_T} \vec{e}_r$$

où g_0 est la norme du champ de pesanteur à la surface de la Terre, supposé uniforme, R_T est le rayon de la terre, $r = OM$ est la distance du point M au centre et $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ est le vecteur unitaire radial.

On considère un tunnel imaginaire rectiligne AB , d'axe Hx (on prendra H l'origine de l'axe et $\vec{e}_x$ le vecteur directeur unitaire dirigé de A vers B) ne passant pas par O et traversant la Terre. On note h la distance OH du tunnel au centre.

Un véhicule, assimilé à un point matériel M (masse m), glisse sans frottement dans le tunnel. Des parois magnétiques évitent même que le véhicule ne soit en contact avec les parois. Ce véhicule part du point A de la surface terrestre sans vitesse initiale.



1. Montrer que la force $\vec{F}$ est conservative et qu'elle dérive de l'énergie potentielle $E_p = \frac{mg_0}{R_T} \frac{r^2}{2} + K$.

Réponse :

Calculons le travail élémentaire de la force $\vec{F}$:

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = -mg_0 \frac{r}{R_T} \vec{e}_r \cdot d(r \vec{e}_r) = -mg_0 \frac{r}{R_T} \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta)$$

On en déduit, entre deux points A et B :

$$\delta W = -mg_0 \frac{r}{R_T} dr \Rightarrow W_{A \rightarrow B} = \int_{r_A}^{r_B} -mg_0 \frac{r}{R_T} dr = \left[-\frac{mg_0 r^2}{2R_T} + K \right]_{r_A}^{r_B}, K \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $W_{A \rightarrow B}$ ne dépend pas du chemin suivi, donc la force est conservative et on obtient par identification

avec $W = -\Delta E_p$: $E_p = \frac{mg_0 r^2}{2R_T} + K$

Pour aller plus loin :

Attention a ne pas introduire la constante K n'importe comment ! On ne peut pas dire " $E_p = mg_0 r^2 (2R_T)$ ou blablabla donc $E_p = mg_0 r^2 (2R_T) + K$ "; peu importe le blablabla, c'est faux, sauf pour $K = 0$. La constante vient du calcul de primitive...

2. Déterminer K en choisissant une énergie potentielle nulle au centre O .

Réponse :

En C , on a $r = 0$ d'où $E_p(r = 0) = K = 0$. On a donc finalement

$$E_p = \frac{mg_0 r^2}{2R_T}$$

3. Montrer que le système est conservatif et calculer son énergie mécanique.

Réponse :

Le système est soumis à une force $\vec{F}$ qui est conservative (Q1) ainsi qu'à une force de guidage (l'énoncé mentionne un champ magnétique) qui ne travaille pas (perpendiculaire au mouvement). D'après le théorème de l'énergie mécanique en référentiel galiléen, son énergie mécanique est une constante. On peut la calculer à l'état initial, où M est en A et sans vitesse :

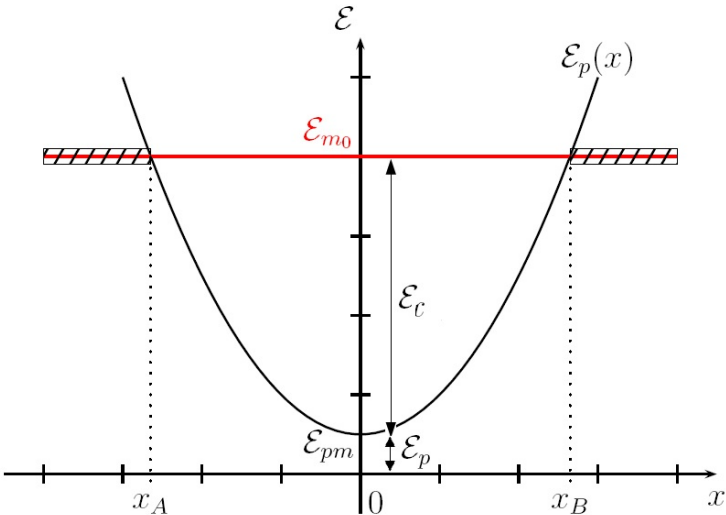
$$E_m = E_{m_A} = E_c + E_{p_A} = 0 + \frac{mg_0 R^2}{2R_T} \Rightarrow E_m = \frac{mg_0 R_T}{2}$$

4. Exprimer maintenant l'énergie potentielle du système en fonction de x et tracer la courbe $E_p(x)$. On placera au moins un point particulier.

Réponse :

Géométriquement, on voit d'après le théorème de PYTHAGORE que $r^2 = h^2 + x^2$ d'où $E_p = \frac{mg_0}{2R_T} (h^2 + x^2)$

Il s'agit d'une parabole tournée vers le haut. En $x = 0$, on a $E_p(0) = \frac{mg_0 h^2}{2R_T}$, c'est par ailleurs le minimum de la fonction, d'où la courbe suivante :



5. Déterminer la (les) position(s) d'équilibre et leur(s) stabilité(s).

Réponse :

On est à l'équilibre lorsque $\frac{dE_p}{dx} = mg_0x/R_T = 0 \Rightarrow x = 0$ De plus, on a $\frac{d^2E_p}{dx^2} = mg_0/R_T > 0$ donc la position d'équilibre est stable. Ce résultat est tout à fait conforme à ce qui peut être observé sur la courbe.

6. Quelle est la nature du mouvement ? Déterminer les positions extrêmes x_{min} et x_{max} (démonstration attendue) atteintes par le point M . Que vaut l'énergie cinétique en ces points ?

Réponse :

Le système est conservatif donc son énergie mécanique se conserve. On peut donc placer E_m sur le graphe : c'est une droite horizontale. Comme $E_m = E_c + E_p$ avec $E_c \geq 0$, on a $E_p \leq E_m$, ce qui limite les positions accessibles au point M . Le mouvement est confiné, le point M effectue des oscillations entre x_{min} et x_{max} .

En x_{min} et x_{max} , la vitesse est nulle car $E_p = E_m$ donc $E_c = 0$.

Pour déterminer x_{min} et x_{max} on résout l'équation

$$E_p(x) = E_m \Rightarrow \frac{mg_0}{2R_T}(x^2 + h^2) = \frac{mg_0R_T}{2} \Rightarrow x^2 + h^2 = R_T^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{R_T^2 - h^2}$$

d'où $x_{min} = -\sqrt{R_T^2 - h^2}$ et $x_{max} = +\sqrt{R_T^2 - h^2}$

Ces deux positions correspondent respectivement aux points A et B .

Pour aller plus loin :

L'idée principale de la réponse est $E_m = E_p$ aux limites du mouvement, c'est cette relation qui permet de définir les bornes. A l'inverse, il ne faut surtout pas commencer par dire que les positions extrêmes sont associées aux points A et B , sinon il n'y a plus de démonstration possible.

7. Déterminer la vitesse maximale atteinte par le véhicule au cours de son mouvement puis réaliser l'application numérique pour $h = 3000$ km. Faire apparaître sur le graphique l'énergie potentielle et l'énergie cinétique en ce point.

Réponse :

La vitesse maximale est atteinte lorsque l'énergie cinétique est maximale donc lorsque l'énergie potentielle est minimale, soit en $x = 0$. On a alors

$$E_m = \frac{mg_0R_T}{2} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{mg_0h^2}{2R_T} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{mg_0}{2R_T}(R_T^2 - h^2) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g_0}{R_T}(R_T^2 - h^2)} \approx 7 \text{ km/s}$$

8. Par une méthode énergétique, déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit l'abscisse x de M .

Réponse :

L'énergie mécanique étant constante, sa dérivée par rapport au temps est nulle. En reprenant la première expression de l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{mg_0}{2}(x^2 + h^2)$$

On dérive :

$$\frac{1}{2}m2\dot{x}\ddot{x} + \frac{mg_0}{2R}2x\dot{x}$$

En simplifiant par $\dot{x}$, on en déduit l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{g_0}{R}x = 0$$

En posant $\omega_0^2 = \frac{g_0}{R}$, on reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

9. En déduire l'expression de x en fonction du temps. Quelle est alors la durée T_{as} d'un aller simple ? Réaliser l'application numérique.

Réponse :

La solution générale de cette équation s'écrit $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$. Les conditions initiales permettent de déterminer A et B .

A $t = 0$, $x = x_A = -\sqrt{R^2 - h^2} = A$. De plus, $\dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$ d'où à $t = 0$ $\dot{x}(0) = B\omega_0 = 0$ car le vitesse initiale est nulle. On a donc finalement

$$x(t) = -\sqrt{R^2 - h^2} \cos(\omega_0 t)$$

Afin de mettre $x(t)$ sous une forme faisant apparaître une amplitude positive, on peut aussi écrire :

$$x(t) = \sqrt{R^2 - h^2} \cos(\omega_0 t + \pi)$$

La durée de l'aller simple est la moitié de la période des oscillations soit

$$T_{as} = \frac{2\pi}{2\omega_0} = \pi \sqrt{\frac{R}{g_0}} \approx 2,5 \times 10^3 \text{ s} \approx 40 \text{ minutes}$$

Le prochain exercice, assez calculatoire, est uniquement à traiter et à rendre si vous visez une classe étoilée l'an prochain.

II Oscillateur harmonique quantique

On envisage dans cette partie un traitement quantique de l'oscillateur harmonique. L'objectif est d'obtenir l'expression quantifiée des valeurs possibles de l'énergie de cet oscillateur harmonique.

On note $\Psi(x,t)$ la fonction d'onde du système décrivant l'oscillateur harmonique. Ce système est un point matériel M dont la masse est notée m . Ce point évolue le long d'un axe $(O, \vec{e}_x)$, la distance $x = OM$ représente l'élongation du ressort de raideur k modélisant la liaison chimique entre les deux atomes d'une molécule diatomique à travers le potentiel $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Il s'agit donc d'un problème unidimensionnel.

Le système est de plus stationnaire, on peut donc séparer la fonction d'onde en deux parties sous la forme $\Psi(x,t) = f(x) \times \exp(-iEt/\hbar)$ où E représente les valeurs de l'énergie accessibles à ce système. Pour l'oscillateur harmonique, on montre que ces valeurs de E doivent être positives. La fonction $\Psi(x,t)$ est une solution de norme unité de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x,t) + V(x)\Psi(x,t)$$

La notation $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ est équivalente à une dérivation de la fonction Ψ par rapport à la variable t . Cette notation est utilisée en mathématique à la place de $\frac{d\Psi}{dt}$ lorsque Ψ dépend explicitement de plusieurs variables, ici : x et t .

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $f : x \rightarrow f(x)$ en fonction des paramètres $k, m, \hbar$ et E

Réponse :

On a d'après l'énoncé $\psi(x,t) = f(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$. On en déduit $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}\psi(x,t)$ que l'on injecte dans l'équation de Schrödinger :

$$E\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x,t) + V(x)\Psi(x,t) \Rightarrow Ef(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 f}{dx^2} + V(x)f(x)$$

En effet, on peut ici simplifier par l'exponentielle chacun de ces termes.

On effectue le changement de variable $\alpha = x \left(\frac{mk}{\hbar^2}\right)^{1/4}$ et l'on pose $\gamma = \left(\frac{4mE^2}{\hbar^2 k}\right)^{1/2}$

2. Quelles sont les dimensions de α et de γ ?

Réponse :

- On a $[k] = M.T^{-2}$ puis $[h] = M.L^2.T^{-1}$. On en déduit $[\alpha = L \left(\frac{M^2.T^{-2}}{M^2.L^4.T^{-2}}\right)^{1/4}] = 1$. α est donc une grandeur sans dimension.
- De même, on a $[\gamma] = \left(\frac{M^3.L^4.T^{-4}}{M^2.L^4.T^{-2}.MT^{-2}}\right)^{1/2} = 1$. Il s'agit bien aussi d'une grandeur sans dimension.

3. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $f : \alpha \rightarrow f(\alpha)$.

Réponse :

On observe que $\frac{d^2}{dx^2} = \left(\frac{mk}{\hbar^2}\right)^{1/2} \frac{d^2}{d\alpha^2}$. On obtient ainsi :

$$Ef(\alpha) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\sqrt{mk}}{\hbar} \frac{d^2 f}{d\alpha^2} + \frac{1}{2}k \frac{\hbar}{\sqrt{mk}} \alpha^2 f(\alpha) \tag{II.1}$$

$$\Rightarrow \frac{2E\sqrt{m}}{\hbar\sqrt{k}} f(\alpha) = -\frac{d^2 f}{d\alpha^2} + \alpha^2 f(\alpha) \tag{II.2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 f}{d\alpha^2} = (\alpha^2 - \gamma) f(\alpha) \tag{II.3}$$

On sait d'après la question précédente que l'on a bien obtenu une équation homogène (ici, sans dimension).

4. Vérifier que dans le régime $\alpha \rightarrow \pm\infty$, on peut écrire $f(\alpha) \simeq e^{\pm\frac{1}{2}\alpha^2}$

Réponse :

On calcule la dérivée seconde de l'expression proposée :

$$\frac{d^2 e^{\pm\frac{1}{2}\alpha^2}}{d\alpha^2} = \frac{d \pm \alpha e^{\pm\frac{1}{2}\alpha^2}}{d\alpha} = \pm e^{\pm\frac{1}{2}\alpha^2} + \alpha^2 e^{\pm\frac{1}{2}\alpha^2} \Rightarrow \frac{d^2 f_\infty}{d\alpha^2} = (\alpha^2 \pm 1)f_\infty$$

Or lorsque $\alpha \rightarrow \infty$, on a $\alpha^2 - \gamma \simeq \alpha^2 \pm 1$. Ainsi f_∞ est solution d'une équation équivalent lorsque $\alpha \gg 1$

5. Justifier succinctement que seule la solution $f(\alpha) \simeq e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}$ est acceptable physiquement.

Réponse :

En effet, l'autre solution diverge lorsque $\alpha \rightarrow \infty$ donc lorsque $x \rightarrow +\infty$. Cette fonction ne serait donc pas normalisable (la somme des probabilités doit être égale à 1).

Dès lors que nous connaissons le comportement asymptotique de la solution recherchée, nous pouvons l'extraire de celle-ci en effectuant le changement de fonction $f(\alpha) = g(\alpha) \times e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}$

6. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction $g : \alpha \rightarrow g(\alpha)$

Réponse :

On peut injecter cette expression dans l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 g e^{-\frac{\alpha^2}{2}}}{d\alpha^2} = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{dg}{d\alpha} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} - g\alpha e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \right) = \frac{d^2 g}{d\alpha^2} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} - 2\frac{dg}{d\alpha} \alpha e^{-\frac{\alpha^2}{2}} + g(\alpha^2 - 1)e^{-\frac{\alpha^2}{2}} = (\alpha^2 - \gamma) g e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \tag{II.4}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 g}{d\alpha^2} - 2\alpha \frac{dg}{d\alpha} + (\gamma - 1)g = 0 \tag{II.5}$$

On peut ensuite montrer que $g(\alpha) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p \alpha^p$ avec la relation de récurrence pour les coefficients b_p :

$$b_{p+2} = b_p \frac{2p+1-\gamma}{(p+1)(p+2)}$$

Si l'on conserve tous les termes de la série, on montre que le comportement asymptotique de la fonction $g : \alpha \rightarrow g(\alpha)$ l'emporte sur $\exp(-\alpha^2/2)$ en $\pm\infty$ ce qui ne permet pas de construire de solution physiquement acceptable. La seule possibilité est de tronquer la série en imposant l'existence d'un entier n tel que si $p \geq n$ alors $b_{p+2} = 0$.

7. En déduire que les énergies accessibles à un oscillateur harmonique en régime quantique sont de la forme :

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$$

avec ω à déterminer en fonction de m et k .

Réponse :

D'après la relation de récurrence, on obtient que $2n+1-\gamma=0 \Rightarrow \gamma=2n+1$. De plus, on a $\gamma = \frac{2E}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{k}}$. On en déduit :

$$E = \hbar \left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{k/m} = \hbar \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ce résultat est ainsi cohérent avec la formule vue en cours pour le premier niveau d'énergie de l'oscillateur harmonique

