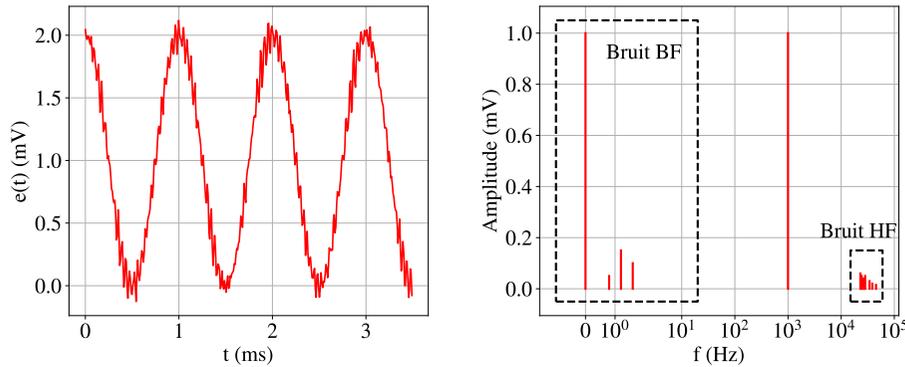


Physique - Devoir Maison 6  
03/02/2025

## Corrigé

### I Conditionnement d'un signal bruité

On souhaite étudier le signal fourni par un microphone. Une mesure directe à l'oscilloscope permet d'obtenir les résultats suivants pour le signal temporel  $e(t)$  et son spectre.



On constate la présence de bruit à basse fréquence (par exemple, la valeur moyenne du signal n'est pas nulle). De plus, il y a aussi du bruit à haute fréquence, lié à de petites variations très rapides du signal autour de la composante harmonique principale.

De plus, le niveau de signal global est très faible (quelques mV), ce qui le rend difficilement exploitable. On souhaite alors réaliser un montage simple et permettant de remédier à ces inconvénients.

#### 1. Atténuation du bruit basse-fréquence ( $H_1$ ) :

- (a) Proposer un montage série utilisant un résistor, une bobine et un condensateur de valeurs respectives  $R$ ,  $L$  et  $C$  afin de réaliser un filtre de type passe haut. Vérifier ensuite qu'il s'agit bien du bon type de filtre à l'aide d'une étude asymptotique en basses et hautes fréquences.

On notera  $e$  la tension à l'entrée du filtre et  $u_1$  la tension à la sortie.

#### Réponse :

On peut utiliser un montage RLC série avec la tension de sortie sur la bobine.

En basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil, donc la tension de sortie est nulle. À l'inverse, en haute fréquence, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert et le condensateur à un fil. On en déduit via la loi des mailles que la tension de sortie est égale à la tension d'entrée (car  $u_R = Ri = 0$ ). Il s'agit donc bien d'un filtre de type passe haut, comme attendu.

- (b) Mettre la fonction de transfert associée à ce filtre, et notée  $H_1$ , sous la forme :

$$H_1 = \frac{u_1}{e} = \frac{-(\omega/\omega_1)^2}{1 + j\frac{\omega/\omega_1}{Q_1} - (\omega/\omega_1)^2}$$

Identifier ensuite les expressions de la pulsation propre  $\omega_1$  et du facteur de qualité  $Q_1$  en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

#### Réponse :

Un pont diviseur de tension en régime sinusoïdal forcé donne :

$$H_1 = \frac{u_1}{e} = \frac{jL\omega}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = \frac{-LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

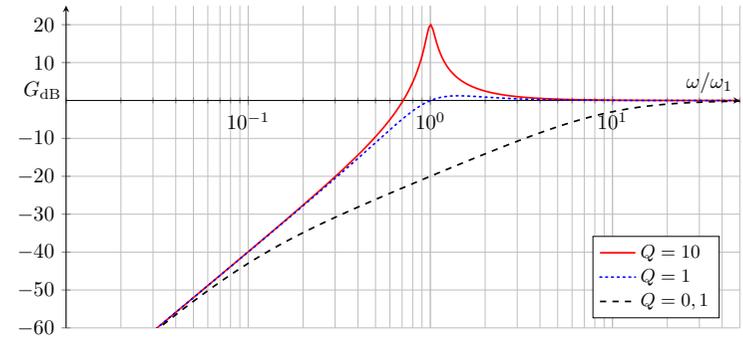
On en déduit par identification avec la forme proposée que  $\omega_1^2 = 1/LC \Rightarrow \omega_1 = 1/\sqrt{LC}$ . De plus, on

$$\text{trouve } 1/(\omega_1 Q_1) = RC \Rightarrow Q_1 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- (c) Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain correspondant au filtre  $H_1$  pour les valeurs suivantes du facteur de qualité : 0, 1 ; 1 ; 10. On placera  $\log(\omega/\omega_1)$  en abscisse et on déterminera les équations des asymptotes.

#### Réponse :

On observe que quelque soit le facteur de qualité, on a  $G_{dB} \rightarrow 0$  en HF et  $G_{dB} \sim 40 \log(\omega/\omega_1)$  en BF. De plus,  $G_{dB}(x=1) = -20 \log(Q)$ . On en déduit les tracés suivants :



- (d) On souhaite atténuer fortement les basses fréquences (dont la valeur moyenne) du signal mesuré sans trop modifier le reste du contenu spectral de ce dernier. Proposer alors dans un premier temps des valeurs pertinentes pour  $\omega_1$  et  $Q_1$  puis enfin pour  $R$  et  $L$  sachant que  $C = 10 \mu\text{F}$ .

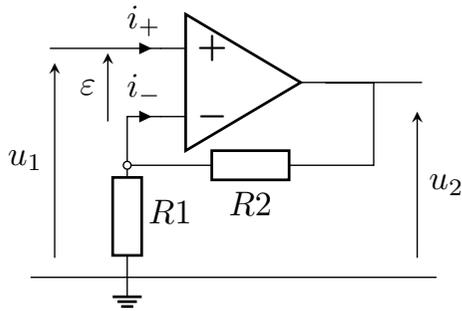
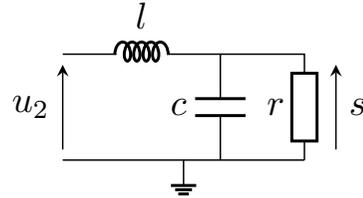
#### Réponse :

D'après la question précédente, on observe qu'un facteur de qualité proche de l'unité permet d'éviter à la fois d'amplifier ou d'atténuer les pulsation proches de  $\omega_1$ .

De plus, on peut choisir une fréquence de propre  $f_1 = 1 \times 10^2 \text{ Hz}$  qui correspond à  $\omega_1 = 2\pi f_1 \approx 630 \text{ rad/s}$  car cette dernière permet de bien atténuer les basses fréquences du signal  $e$  sans toucher la partie utile du spectre.

On en déduit que  $L = 1/(C\omega_1^2) \approx 0,25 \text{ H}$  puis que  $R = \sqrt{L/(Q_1^2 C)} \approx 160 \Omega$ . Ces valeurs semblent raisonnables par rapport à celles couramment rencontrées en TP. On note toutefois que la valeur de l'inductance est assez élevée et qu'il faudra donc utiliser une bobine volumineuse.

On considère alors les deux montages suivants. Celui associé au filtre actif  $H_2$  utilise un Amplificateur Linéaire Intégré (ALI) supposé idéal et deux résistors de valeurs  $R_1$  et  $R_2$ . L'autre montage, passif, est basé sur des composants de valeurs respectives  $l$ ,  $c$  et  $r$ .

FIGURE I.1 – Schéma électrique correspondant au filtre  $H_2$ FIGURE I.2 – Schéma électrique correspondant au filtre  $H_3$ 

## 2. Amplification du signal ( $H_2$ ) :

- (a) Que peut-on dire des courants  $i_+$  et  $i_-$  pour un ALI idéal ? De plus justifier brièvement que l'ALI du schéma de la figure I.1 fonctionne en régime linéaire en déduire la valeur de  $\varepsilon$ .

### Réponse :

Les courants entrant dans l'ALI sont nuls si ce dernier est idéal (impédance d'entrée infinie). De plus, il y a une rétroaction négative, grâce à la branche reliant la sortie à l'entrée inverseuse. On en déduit que l'ALI fonctionne en régime linéaire et donc que  $\varepsilon = 0$ .

- (b) Etablir l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H}_2 = \frac{u_2}{u_1}$  du filtre actif proposé.

### Réponse :

On observe un pont diviseur de tension formé par les deux résistors d'où :

$$\frac{V_- - 0}{u_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \Rightarrow \frac{u_2}{u_1} = \underline{H}_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

## 3. Atténuation du bruit haute-fréquence ( $H_3$ ) :

- (a) Quel type de filtrage est réalisé par le montage du schéma de la figure I.2 ?

### Réponse :

En basses fréquences, la bobine est équivalente à un fil donc  $\underline{s} = u_2$ . De même, En hautes fréquences, le condensateur est équivalent à un fil d'où  $\underline{s} = 0$ . Le filtre présente alors un caractère passe bas. Il pourra bien filtrer les hautes fréquences comme le laisse supposer l'énoncé.

- (b) Mettre sa fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H}_3 = \frac{\underline{s}}{u_2} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega/\omega_2}{Q_2} - (\omega/\omega_2)^2}$$

puis exprimer  $Q_2$  et  $\omega_2$  en fonction de  $r$ ,  $l$  et  $c$ .

### Réponse :

On applique un pont diviseur de tension en remarquant que les deux dipôles de droite sont en parallèle :

$$\underline{H}_3 = \frac{Z_{\text{eq}}}{j\omega + Z_{\text{eq}}} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{Z_{\text{eq}}}} = \frac{1}{1 + j\frac{l}{r}\omega - l\omega^2}$$

On en déduit par identification que  $1/(\omega_2 Q_2) = (l/r)$  et que  $\omega_2^2 = 1/(lc)$  d'où au final :

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{lc}} \quad \text{et} \quad Q_2 = r\sqrt{\frac{c}{l}}$$

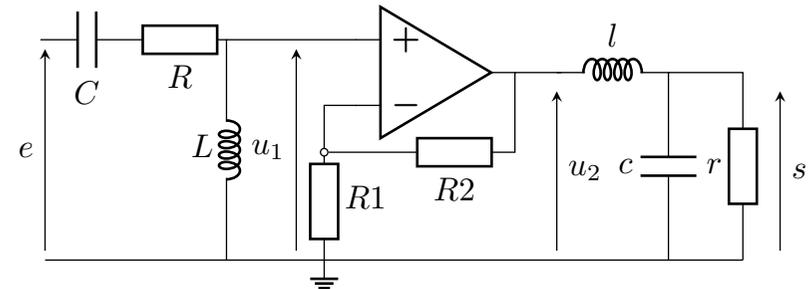
On remarque comme attendu pour un circuit RLC avec deux dipôles en parallèle que le facteur de qualité est l'inverse de celui obtenu en début d'exercice, pour un circuit en série.

- (c) On choisit pour les composants les valeurs  $r = 160 \Omega$ ,  $c = 100 \text{ nF}$  et  $l = 10 \text{ mH}$ . En déduire les valeurs numériques pour  $Q_2$  et  $f_2 = \omega_2/(2\pi)$  puis justifier que ce filtre est bien à même de filtrer le bruit haute fréquence contenu dans le spectre du signal de départ  $e(t)$ .

### Réponse :

On trouve  $Q_2 \approx 0,5$ , ce qui permet d'éviter d'avoir un phénomène de résonance, et donc un diagramme de Bode en gain proche de ses asymptotes puis  $f_2 \approx 5 \times 10^3 \text{ Hz}$ . Cette fréquence propre est bien à la fois supérieure à la partie utile du spectre (1 kHz) (qui sera donc préservé) et inférieure aux fréquences du bruit à filtrer (qui sera donc atténué). Le filtre proposé est alors bien adapté.

On considère le montage global associé au conditionnement du signal  $e(t)$ .



4. Justifier brièvement et rigoureusement que la fonction de transfert du montage global s'exprime selon :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{e} = \underline{H}_1 \times \underline{H}_2 \times \underline{H}_3$$

De quel type de filtre s'agit-il et quel est son ordre ?

### Réponse :

La présence d'un ALI garantit que les trois dipôles  $R$ ,  $L$  et  $C$  à gauche sont traversés par le même courant. La fonction de transfert  $H_1$  obtenue par un pont diviseur de tension est encore valide. De plus, on a

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{e} = \frac{\underline{s}}{u_2} \times \frac{u_2}{u_1} \times \frac{u_1}{e} = \underline{H}_3 \times \underline{H}_2 \times \underline{H}_1$$

d'où le résultat.

En combinant un passe bas d'ordre 2 et un passe haut d'ordre 2, on obtient un passe bande d'ordre 4 (en traçant le diag. de Bode en gain, on peut constater qu'il y a  $4 \times 20 = 80\text{dB/dec}$  d'écart entre les asymptotes BF et HF. De plus, la présence du montage amplificateur au milieu permet d'avoir un gain en décibel fortement positif au niveau de la bande passante, et donc d'amplifier la partie utile du signal d'entrée.

## II Microscope électronique à balayage (D'après Banque PT 2017 et capes 2008)

La microscopie optique classique est limitée par la diffraction. Pour améliorer la résolution, on remplace les photons par des électrons de charge  $q = -e$  et de masse  $m$ .

1. Définir la diffraction. Donner, en argumentant, un ordre de grandeur de la résolution d'un microscope optique fonctionnant dans le visible.

### Réponse :

La diffraction est un phénomène ondulatoire se produisant lors de l'interaction d'une onde de longueur d'onde  $\lambda$  avec un objet de dimension comparable à  $\lambda$ . La diffraction d'une onde engendre un éparpillement spatial de l'onde.

La résolution d'un microscope optique est donc de l'ordre de la longueur d'onde du visible, soit  $400 - 800\text{ nm}$ .

### II.A Aspect énergétique

Les électrons sont accélérés dans un canon à électrons (figure II.1) constitué de deux armatures planes et parallèles, distantes de  $d = 1\text{ cm}$  et séparées par du vide quasi-parfait.

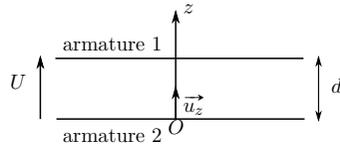


FIGURE II.1 – Schéma du canon à électrons.

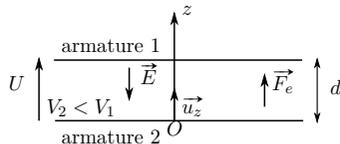
On applique entre les armatures une tension positive  $U = V_1 - V_2$ . On suppose que le champ électrique  $\vec{E}$  entre les armatures est uniforme.

2. Représenter le champ électrique  $\vec{E}$  entre les armatures. Sur quelle armature les électrons doivent-ils être émis sachant que leur vitesse initiale est nulle ? Exprimer la force électrique exercée sur l'électron en fonction de  $E_0 = \|\vec{E}\|$ ,  $e$  et  $\vec{u}_z$ .

### Réponse :

Le champ électrique est orienté selon les potentiels décroissants, donc  $\vec{E} = -E_0\vec{u}_z$ .

La force électrique s'exerçant sur l'électron s'écrit  $\vec{F}_e = -e\vec{E} = eE_0\vec{u}_z$ . Cette force est orientée selon  $+\vec{u}_z$ , donc les électrons doivent être émis depuis l'armature 2.



3. Définir l'énergie potentielle électrique  $E_p(z)$  de l'électron situé à la distance  $z$  de l'armature 2 en fonction notamment du potentiel  $V(z)$ . Établir l'expression de  $\vec{E}$  en fonction notamment de  $U$ .

### Réponse :

Par définition  $E_p(z) = -eV(z)$ . De plus,  $\vec{F}_e = -\text{grad}E_p$ . On projette selon  $\vec{u}_z$  :

$$\frac{dE_p}{dz} = -eE_0 \quad \text{donc} \quad E_p(z) = -eE_0z + \text{cste}$$

En regardant entre  $z = 0$  et  $z = d$ , on obtient

$$E_p(z = d) - E_p(z = 0) = -e(V(z = d) - V(z = 0)) = -eU$$

Or  $E_p(z = d) - E_p(z = 0) = -eE_0d$ , d'où  $E_0 = U/d$ , donc  $\vec{E} = -\frac{U}{d}\vec{u}_z$ .

On donne les valeurs numériques approchées :

$$\frac{e}{m} \approx 2 \times 10^{11} \text{ S} \cdot \text{I}.$$

4. Exprimer la vitesse  $v$  atteinte par les électrons lorsqu'ils arrivent sur l'armature opposée, en fonction de  $U$ ,  $e$  et  $m$ . Calculer  $v$  sachant que  $U = 1 \times 10^5\text{ V}$ . Commenter l'ordre de grandeur obtenu.

### Réponse :

L'électron, assimilable à un point matériel  $M$  de masse  $m$ , est étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Il n'est soumis qu'à la force électrique (on néglige le poids) qui est une force conservative. Donc  $E_m = \text{cste}$ .

On exprime l'énergie mécanique en  $z = 0$  et en  $z = d$  :

$$E_m(z = 0) = -eV(z = 0) \quad ; \quad E_m(z = d) = -eV(z = d) + \frac{1}{2}mv^2$$

Comme  $U = V(z = d) - V(z = 0)$ , on en déduit  $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ .

L'application numérique donne  $v = 2 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , donc la particule est relativiste.

### II.B Déflecteur magnétique

Le rôle d'un déflecteur magnétique est simplement de dévier le faisceau d'électrons.

On suppose qu'un électron de vitesse  $\vec{v}_0$  arrive dans une zone où règne un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  perpendiculaire au vecteur vitesse. Il n'y a plus de champ électrique.

5. Justifier le fait que le mouvement de l'électron est uniforme.

### Réponse :

L'électron est soumis uniquement à la partie magnétique de la force de Lorentz  $\vec{F}_m = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ .

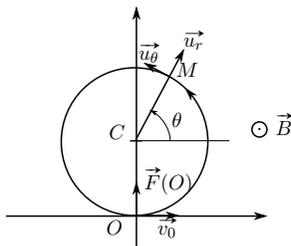
D'après le théorème de la puissance cinétique  $\frac{dE_c}{dt} = \vec{F}_m \cdot \vec{v}$ .

Par propriété du produit vectoriel  $\vec{F}_m \perp \vec{v}$ , donc  $\vec{F}_m \cdot \vec{v} = 0$ .

On en déduit que  $E_c = \text{cste}$ , soit  $v = \|\vec{v}\| = \text{cste}$ . Le mouvement est uniforme.

6. On admet que la trajectoire est circulaire. Tracer cette trajectoire, en faisant clairement apparaître les vecteurs  $\vec{v}_0$  et  $\vec{B}$ . Placer le centre  $C$  de la trajectoire circulaire, ainsi que la base polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  de centre  $C$ . L'axe de référence pour l'angle  $\theta$  sera pris parallèle à  $\vec{v}_0$  et passant par  $C$ .

Réponse :



7. Déterminer l'expression du rayon  $R$  du cercle décrit en fonction de  $m$ ,  $v_0 = \|\vec{v}_0\|$ ,  $e$  et  $B$ .

Réponse :

On applique la loi de la quantité de mouvement avec  $\vec{a} = -\frac{v_0^2}{R}\vec{u}_r$  pour un mouvement circulaire uniforme :

$$-m\frac{v_0^2}{R}\vec{u}_r = -ev_0\vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_z = -ev_0B\vec{u}_r$$

On projette sur  $\vec{u}_r$  :  $R = \frac{mv_0}{eB}$ .