

Corrigé

I Oscillateur quasi-sinusoidal

On souhaite réaliser un oscillateur quasi-sinusoidal électrique, c’est à dire un montage qui permet d’générer un signal quasi harmonique, sans utiliser de signal harmonique en entrée.

Pour cela, on va coupler un montage amplificateur, utilisant un Amplificateur Linéaire Intégré, appelé ALI dans toute la suite, à un filtre passe bande très selectif.

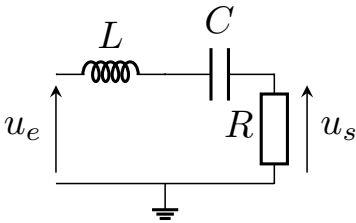
I.A Etude du filtre passe bande

On considère le filtre RLC suivant, pour lequel la tension de sortie u_s est prise au niveau du résistor. On suppose de plus que la tension d’entrée est de la forme $u_e = E \cos(\omega t)$.

1. Justifier rigoureusement que ce montage permet de réaliser un filtrage du type passe-bande.

Réponse :

On obtient en BF un circuit ouvert (le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert) donc le courant est nul d’où $u_R = u_s = 0$. Le même résultat est aussi observé en HF, grâce à la bobine. On en déduit que le filtre est un passe bande.



2. Exprimer la fonction de transfert H de ce filtre, puis en déduire les expressions de ω_0 et Q à l’aide de la forme canonique

$$H = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \text{ où } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Réponse :

On observe un pont diviseur de tension d’où $H = \frac{Z_R}{Z_R + Z_L + Z_C}$ soit

$$H = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega + \frac{1}{jRC\omega}} \text{ du type } \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

d’où l’on déduit par identification $\frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R}$ et $Q\omega_0 = \frac{1}{RC}$ soit après calculs,

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

puis

$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

On utilise alors les valeurs suivantes pour les composants : $R = 200\,\Omega$, $L = 80\,\text{mH}$ et $C = 20\,\text{nF}$.

3. On dispose uniquement de bobines d’inductance $L_1 = 40\,\text{mH}$ et de condensateurs de capacité $C_1 = 100\,\text{nF}$ en plusieurs exemplaires. Comment peut-on les combiner pour obtenir les valeurs attendues pour L et C .

Réponse :

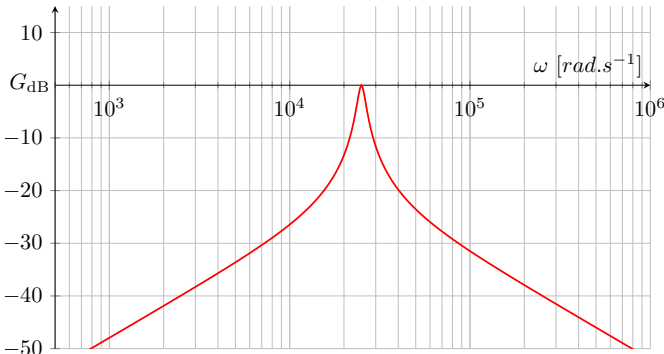
On remarque qu’en série, on a $L_1 + L_1 = 80\,\text{mH} = L$ puis toujours en série, $\frac{5}{C_1} = \frac{1}{C}$. Il convient finalement de prendre deux bobines et cinq condensateurs en séries.

4. Tracez le diagramme de Bode en gain uniquement associé à ce filtre.

Réponse :

A l’aide des valeurs proposées, on obtient $Q = 10$ et $\omega_0 = 25 \times 10^3\,\text{rad/s}$ En BF, on a $H \simeq_{BF} \frac{1}{-jQ(1/x)}$ d’où $g_{dB,BF} = -20\log(Q) + 20\log(x)$ (pente de $+20\,\text{dB}$ par décade). En HF, on a $H \simeq_{HF} \frac{1}{jQ(x)}$ d’où $G_{dB,HF} = -20\log(Q) - 20\log(x)$ (pente de $-20\,\text{dB}$ par décade). Ces asymptotes se croisent pour $x = 1$ soit $\omega = \omega_0$ à l’ordonnée $-20\log(Q) = -20\,\text{dB}$.

De plus, en $x = 1$, on a $H(1) = 1$ d’où $G_{dB}(x = 1) = 0$. On peut alors réaliser le tracé, en commençant par placer les asymptotes.



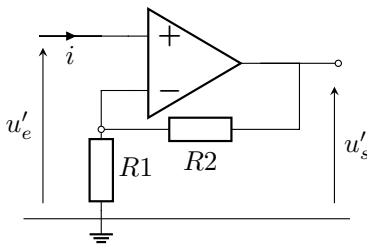
I.B Etude du bloc amplificateur

L’Amplificateur Linéaire Intégré (ALI) ci contre est supposé idéal et est alimenté par un générateur $15\,\text{V}, -15\,\text{V}$. Les tensions d’entrée et de sortie sont notées u'_e et u'_s , pour ne pas interférer avec la première partie du problème.

5. Justifier clairement que $V_+ = V_-$. De plus, que peut-on dire du courant i ?

Réponse :

La rétroaction ayant lieu sur l’entrée inverseuse, l’ALI fonctionne en régime linéaire doù le résultat. De plus, l’ALI étant idéal, on a $i = i_- = 0$.



6. Établir l’expression de la fonction de transfert $H' = \frac{u'_s}{u'_e}$

Réponse :

On observe un pont diviseur de tension formé par les deux résistors d’où

$$V_- - 0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} (u'_s - 0) \text{ donc } V_- = V_+ = u'_e = \frac{R_1}{R_2 + R_1} u'_s \text{ et au final } H' = \frac{u'_s}{u'_e} = \frac{R_2 + R_1}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Dans toute la suite, on note $G = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

I.C Étude globale de l'oscillateur

7. Quelle équation différentielle relie les tensions u_s et u_e ? Cette dernière sera exprimée sous forme canonique, en fonction de ω_0 et Q . On précise de plus que u_e n'est pas une tension constante.

Réponse :

Il existe deux méthodes. On peut soit :

- Appliquer la loi des mailles pour obtenir $u_e = u_s + u_L + u_C$ avec $u_L = L \frac{di}{dt}$ et $i = C \frac{du_C}{dt}$. De plus, on a pour le résistor $u_s = Ri$. On obtient en combinant ces résultats, et après avoir dérivé la loi des mailles

$$\frac{du_e}{dt} = \frac{du_s}{dt} + \frac{L}{R} \frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{1}{RC} u_s$$

soit après simplification,

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{LC} u_s = \frac{R}{L} \frac{du_e}{dt}$$

On peut alors introduire ω_0 et Q à l'aide de l'identification avec la forme canonique d'où

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s = \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_e}{dt}$$

- Partir de la fonction de transfert obtenue

$$\underline{u}_s = H \underline{u}_e \Rightarrow \underline{u}_s + jQ \frac{\omega}{\omega_0} \underline{u}_s + \frac{Q\omega_0}{j\omega} \underline{u}_s = \underline{u}_e$$

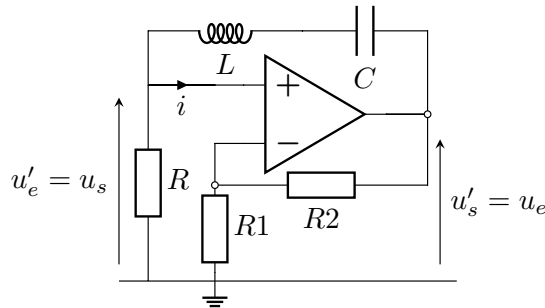
Afin d'éviter l'obtention d'une primitive (terme en $1/(j\omega)$), on peut multiplier les deux côtés de l'égalité par $j\omega\omega_0/Q$ d'où

$$\frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{u}_s + (j\omega)^2 \underline{u}_s + \omega_0^2 \underline{u}_s = \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{u}_e$$

On peut ensuite remplacer les multiplications par $(j\omega)^n$ par des dérivées n^{ième} d'où au final

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s = \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_e}{dt}$$

On considère à présent le montage complet, composé du filtre RLC et du montage amplificateur. Ces derniers sont reliés de sorte que $u'_s = u_e$ et $u'_e = u_s$.



8. Démontrer que pour le montage complet, la tension u_s est solution de

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} (1 - G) \frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s = 0$$

Réponse :

Il convient de combiner les relations entre u_s et u_e d'une part, puis entre $u'_s = u_e$ et $u'_e = u_s$ d'autre part, on en déduit

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s = \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_e}{dt} = \frac{\omega_0}{Q} \frac{du'_s}{dt} = \frac{\omega_0}{Q} \frac{dH' u'_e}{dt} = \frac{\omega_0}{Q} \frac{dG u_s}{dt}$$

d'où le résultat en passant le dernier terme à gauche de l'équation.

On considère dans toute la suite que le gain G est légèrement supérieur à 1.

9. Exprimer les racines notées r_+ et r_- du polynôme caractéristique associé à cette équation différentielle. En déduire l'existence de solutions qui vont diverger au cours du temps.

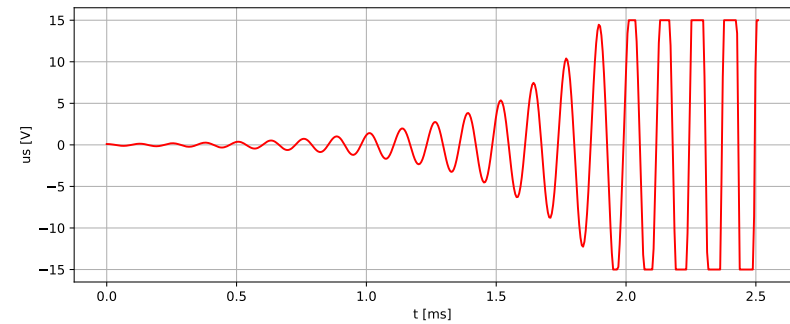
Réponse :

Le polynôme caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} (1 - G)r + \omega_0^2$ admet pour discriminant $\omega_0^2 \left(\frac{(1-G)^2}{Q^2} - 4 \right)$. De plus, d'après l'énoncé, G est légèrement supérieur à 1 donc on peut supposer que le discriminant est négatif. On en déduit

$$r_+ = \omega_0 \frac{G-1}{2Q} + j\sqrt{\Delta} \quad \text{et} \quad r_- = \omega_0 \frac{G-1}{2Q} - j\sqrt{\Delta}$$

On remarque alors que la partie réelle de ces deux racines est positive. On en déduit que les solutions de l'équation homogène associée vont diverger au cours du temps.

L'enregistrement à l'oscilloscope de la tension u_s est présenté sur la figure suivante. L'instant initial $t = 0$ correspond au moment où les deux blocs sont reliés.



10. Comment expliquer le phénomène observé à partir de 2 ms ? À partir de ce signal, comment peut-on obtenir un signal harmonique ?

Réponse :

On observe un signal de type créneau. Une étude détaillée montrant que les valeurs maximale et minimale sont proches de 15 V et de -15 V. Ainsi, c'est le phénomène de saturation de l'ALI qui limite la tension de sortie (la tension u_s est bornée par les tensions d'alimentations de l'ALI).

On peut obtenir un signal quasi harmonique en utilisant un filtre passe bande, centré sur la pulsation obtenue. Finalement, il peut être pertinent de prendre la tension u_e au lieu de u_s , car cette dernière est justement filtrée par un filtre passe bande !

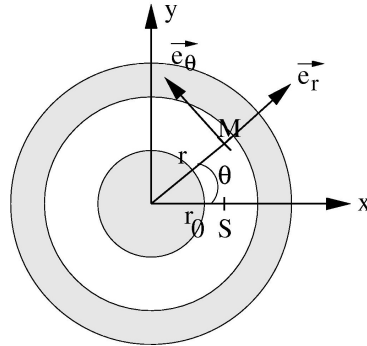
II Mouvement dans un condensateur circulaire

Un électron de masse m et de charge $-e$ est émis avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ entre les deux armatures d'un condensateur cylindrique. On considère que le mouvement se fait dans le plan xOy et on travaille en coordonnées polaires (r, θ) , avec la base polaire de vecteurs unitaires $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.

Le champ électrique qui règne entre les deux armatures est de la forme :

$$\vec{E}(r) = E_0 \frac{r_0}{r} \vec{e}_r$$

Le champ magnétique y est nul. A $t = 0$, l'électron est en S , sur l'axe Ox , à la distance r_0 du centre. A la date t , l'électron est en M tel que $\vec{OM} = r \vec{e}_r$.



1. En négligeant le poids, écrivez les équations différentielles du mouvement de l'électron dans le plan xOy .

Réponse :

On a $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$ et le bilan des force donne $\vec{F}_e = -e\vec{E}(r) = -\frac{eE_0r_0}{r} \vec{e}_r$. L'application du PFD à l'électron dans un référentiel galiléen donne

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta = -\frac{eE_0r_0}{r} \vec{e}_r$$

2. Dans le cas d'une trajectoire circulaire (rayon r_0), Montrez que $v_0 = \sqrt{\frac{eE_0r_0}{m}}$

Réponse :

On a alors $r = r_0 = \text{cste}$ d'où l'on déduit

$$-mr_0\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + mr_0\ddot{\theta} \vec{e}_\theta = -eE_0 \vec{e}_r$$

On considère alors la composante radiale de l'équation

$$-mr_0\dot{\theta}^2 = -eE_0 \Rightarrow m(r_0\dot{\theta})^2 = eE_0r_0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{eE_0r_0}{m}}$$

d'où le résultat.

3. Quelle est alors la période de révolution T de l'électron ?

Réponse :

$$\text{On obtient } v_0 = \frac{2\pi r_0}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r_0}{v_0} = 2\pi \sqrt{\frac{mr_0}{eE_0}}.$$

Question à faire uniquement si vous visez une classe étoile (obligatoire dans ce cas) :

On note $\omega_0 = 2\pi/T$ et $\omega = \dot{\theta}$. On considère alors le cas d'une petite perturbation pour le mouvement circulaire. On introduit alors les grandeurs

$$r = r_0(1 + \alpha) \text{ et } \omega = \omega_0(1 + \beta)$$

avec $\alpha \ll 1$ et $\beta \ll 1$ et avec les conditions initiales $\alpha(0) = \alpha_0$ puis $\beta(0) = 0$.

4. Démontrer que l'on obtient

$$\ddot{\alpha} + 2\omega_0^2\alpha = 4\omega_0^2\alpha_0$$

en négligeant tous les termes infiniment petits d'ordre deux ou plus à partir de l'équation obtenue à la question 1.

Réponse :

On remplace $r = r_0(1 + \alpha)$ et $\dot{\theta} = \omega = \omega_0(1 + \beta)$ dans l'équation obtenue à partir du PFD :

$$m(r_0\ddot{\alpha} - r_0(1 + \alpha)(\omega_0(1 + \beta))^2) \vec{e}_r + m(2r_0\dot{\alpha}\omega_0(1 + \beta) + r_0(1 + \alpha)\omega_0\dot{\beta}) \vec{e}_\theta = -\frac{eE_0r_0}{r_0(1 + \alpha)} \vec{e}_r$$

On effectue un DL pour le second membre puis on ne conserve que les termes d'ordre 0 ou 1

$$m(r_0\ddot{\alpha} - r_0\omega_0^2 - r_0\alpha\omega_0^2 - 2r_0\omega_0^2\beta) \vec{e}_r + m(2r_0\dot{\alpha}\omega_0 + r_0\omega_0\dot{\beta}) \vec{e}_\theta = -eE_0(1 - \alpha) \vec{e}_r$$

On obtient alors suivant $\vec{e}_\theta$

$$2r_0\dot{\alpha}\omega_0 + r_0\omega_0\dot{\beta} = 0 \Rightarrow \boxed{2\dot{\alpha} + \dot{\beta} = 0} \quad (1)$$

Cette équation peut s'intégrer selon

$$2\alpha + \beta = c \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

or d'après les CIs, on trouve $c = 2\alpha_0$ d'où au final

$$\boxed{\beta = 2(\alpha_0 - \alpha)}$$

De même, on obtient suivant $\vec{e}_r$

$$m(r_0\ddot{\alpha} - r_0\omega_0^2 - r_0\alpha\omega_0^2 - 2r_0\omega_0^2\beta) = -eE_0(1 - \alpha) \quad (2)$$

On sait de plus que $\omega_0 = v_0/r_0 = \sqrt{\frac{eE_0}{r_0m}}$. On peut aussi substituer β par son expression et l'équation (2) se ré-écrit alors

$$\begin{aligned} m(r_0\ddot{\alpha} - r_0\alpha\omega_0^2 - 2r_0\omega_0^22(\alpha_0 - \alpha)\omega_0) &= eE_0\alpha \\ \Rightarrow \ddot{\alpha} + (3\omega_0^2 - \underbrace{\frac{eE_0}{mr_0}}_{=\omega_0^2})\alpha &= 4\omega_0^2\alpha_0 \\ \Rightarrow \boxed{\ddot{\alpha} + 2\omega_0^2\alpha} &= 4\omega_0^2\alpha_0 \end{aligned}$$

On obtient donc une équation type oscillateur harmonique pour α . Ainsi, $t \mapsto \alpha(t)$ est une fonction bornée, ce qui est compatible avec l'hypothèse $\alpha \ll 1, \forall t$. En en déduit que le rayon de l'électron va subir de légères oscillations.

Pour aller plus loin :

Cette exercice est basé sur une méthode très classique en physique. Pour un problème donné, modélisé par une équation non linéaire, et souvent impossible à résoudre exactement, on cherche dans un premier temps une solution dans un cas particulier (ici, trajectoire circulaire). Pour aller plus loin, on peut ensuite étudier une perturbation autour de cette solution, il faut donc laisser la possibilité à certains paramètres (ici r et ω) de varier, mais pas trop, d'où l'idée de développements limités.

Utiliser des DLs à un ordre plus élevé donnerait un résultat plus précis, cependant, il serait lui même non linéaire et ne pourrait donc être résolu !