

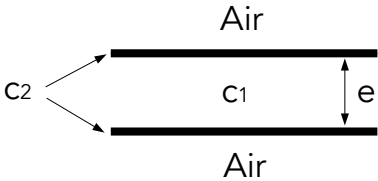
Physique - Devoir Maison 5
13/01/2025

Corrigé

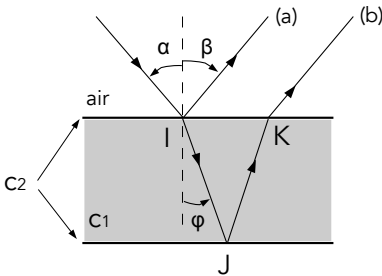
I Irisation des ailes de papillon

Lorsqu'on observe les papillons, on constate que souvent, la couleur observée est changeante selon l'angle de vue : on parle d'irisation. La simple présence d'un pigment coloré ne peut pas expliquer ces variations de couleurs. Il s'agit en effet d'une couleur liée à la structure microscopique de l'aile : certaines sont constituées d'un empilement régulier de couches de 2 matériaux d'indices optiques différents.

On souhaite expliquer le phénomène optique responsable des irisations. On s'intéresse à une unique couche d'épaisseur e d'un matériau noté c_1 , délimitée par deux couches d'épaisseurs négligeables d'un autre matériau noté c_2 . Ces 3 couches sont plongées dans l'air, comme illustré sur la figure ci-dessous. On note n_0 l'indice optique de l'air et n l'indice optique du matériau c_1 , n et n_0 étant différents.



On considère un rayon lumineux incident supposé monochromatique. On note λ sa longueur d'onde dans le vide. Le rayon lumineux se divise en un rayon transmis et un rayon (a) réfléchi dans l'air. Le matériau c_2 constitue l'interface sur laquelle le rayon lumineux se divise. Le rayon transmis est lui-même réfléchi en partie puis transmis dans l'air. Le rayon qui ressort est noté (b).



Dans tout le problème, on travaillera avec les valeurs absolues des angles. Cependant, on les orientera sur les schémas.

1. Déterminer la longueur d'onde λ_1 dans le milieu c_1 . La comparer à λ . Quel est l'intervalle de longueur d'onde (dans le vide) du spectre visible ?

Réponse :

Par définition, $\lambda = c/\nu$ et $\lambda_1 = v/\nu$ avec v la vitesse de propagation de la lumière dans le milieu 1. On a donc

$\frac{\lambda}{\lambda_1} = c/v_1 = n$, d'où $\lambda_1 = \frac{\lambda}{n}$. $\lambda_1 < \lambda$ car l'indice optique d'un milieu est toujours > 1 .

Le visible s'étend des longueurs d'onde de 400 nm pour le violet à 750 nm pour le rouge.

2. Déterminer l'angle β . Justifier.

Réponse :

D'après la 2ème loi de Snell-Descartes pour la réfraction, on a en travaillant avec les valeurs absolues des angles : $\beta = \alpha$.

3. Pourquoi le rayon IJ change-t-il de direction par rapport au rayon incident ? Nommer le phénomène en jeu.

Réponse :

Le rayon IJ est dévié à cause du phénomène de réfraction, dû au changement d'indice entre les milieux traversés.

4. L'indice n est-il plus grand ou plus petit que n_0 ? Justifier.

Réponse :

Le rayon réfracté se rapproche de la normale, ainsi $n > n_0$ car la fonction sin est croissante sur $[0, \pi/2]$.

5. Déterminer l'angle φ en fonction de l'angle α .

Réponse :

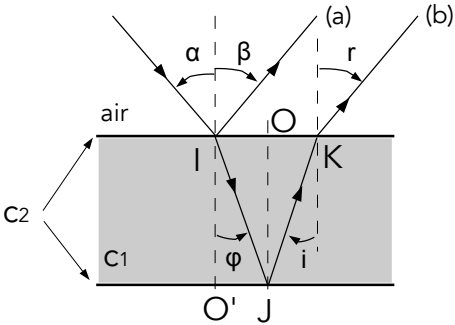
D'après la deuxième loi de SNELL-DISCARTES pour la réfraction, on a

$$n_0 \sin \alpha = n \sin \varphi \Leftrightarrow \sin \varphi = \underbrace{\frac{n_0}{n}}_{<1} \underbrace{\sin \alpha}_{\leq 1} < 1$$

On peut donc appliquer la fonction arcsin et $\varphi = \arcsin \left(\frac{n_0}{n} \sin \alpha \right)$

6. Reproduire le schéma sur votre copie et y placer l'angle d'incidence i au point K. Justifier précisément que cet angle est égal à φ .

Réponse :



Les angles $\widehat{O'IJ}$ et $\widehat{OJI}$ sont alternes-internes, donc égaux. On a donc $\widehat{OJI} = \varphi$. D'après la loi de la réflexion au point J , en travaillant avec les valeurs absolues des angles, on a $\widehat{OJK} = \widehat{IJO} = \varphi$. Enfin, les angles $\widehat{OJK}$ et i sont alternes-internes donc égaux également. On a donc $\boxed{i = \varphi}$.

7. Placer l'angle réfracté r au point K et montrer qu'il est égal à β .

Réponse :
D'après la 2ème loi de SNELL-DESCARTES pour la réfraction au point K , on a

$$n \sin i = n_0 \sin r$$

. Or, $n \sin i = n \sin \varphi = n \sin \alpha$ d'après la loi de la réfraction au point I . On a donc $\boxed{r = \alpha = \beta}$ (toujours avec les valeurs absolues des angles).

Cela explique que les rayons (a) et (b) sont parallèles.

8. Les deux rayons (a) et (b) interfèrent. Expliquer en rappelant les conditions pour que le phénomène d'interférences apparaisse.

Réponse :
Pour que deux ondes interfèrent, il faut qu'elles aient exactement la même fréquence, ceci n'est possible que si elles sont issues d'une même source. C'est le cas ici puisque les rayons (a) et (b) proviennent d'un même rayon incident qui s'est séparé en deux.

Pour aller plus loin :
Si les sources sont distinctes, une différence de fréquence de même un dixième de Hertz va provoquer un déplacement des zones d'interférences constructives et destructives toutes les 10 secondes. Il faut donc vraiment que les fréquences soient identiques, d'où l'importance d'avoir une source unique.

On donne la différence de marche entre les rayons (a) et (b) : $\delta = 2ne \cos(\varphi) + \frac{\lambda}{2}$

9. Montrer que $\delta = 2e\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \beta} + \frac{\lambda}{2}$. On utilisera judicieusement le fait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Réponse :
On sait que $\sin \varphi = \frac{n_0}{n} \sin \alpha$, donc $\sin^2 \varphi = \left(\frac{n_0}{n}\right)^2 \sin^2 \alpha$. Ainsi,

$$1 - \cos^2 \varphi = \left(\frac{n_0}{n}\right)^2 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n}\right)^2 \sin^2 \alpha}$$

De plus, on a vu que $\beta = \alpha$, ainsi, $\boxed{\delta = 2ne\sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n}\right)^2 \sin^2 \beta} + \frac{\lambda}{2} = 2e\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \beta} + \frac{\lambda}{2}}$

10. Quelle relation existe-t-il entre la différence de marche δ , la longueur d'onde λ et le déphasage $\Delta\varphi$ entre 2 ondes ?

Réponse :
On a $\Delta\varphi = k\delta$, avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, d'où $\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta}$

Soit S_0 l'amplitude des ondes sinusoïdales modélisées par les rayons (a) et (b). D'après la formule des interférences, l'amplitude S de l'onde résultant de la superposition des ces 2 ondes est :

$$S^2 = 2S_0^2 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta \right) \right]$$

11. Expliquer ce que sont des interférences constructives. En utilisant le résultat précédent, déterminer une condition sur δ pour avoir des interférences constructives.

Réponse :
On a des interférences constructives lorsque l'amplitude de l'onde résultante est maximale. On doit donc avoir $\cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta \right) = 1$, soit $\frac{2\pi}{\lambda} \delta = 2p\pi$, avec p entier (on évite ici les notations n et k qui peuvent prêter à confusion), soit encore $\delta = p\lambda$, avec $p \in \mathbb{Z}$. Comme $\delta > 0$ ici, on a même plus précisément $p \in \mathbb{N}^*$.

12. On donne $n_0 = 1$, $n = 1,5$ et $e = 0,4 \mu\text{m}$. Quelle longueur d'onde visible permettrait d'obtenir des interférences constructives dans la direction $\beta = 30^\circ$? De quelle couleur s'agit-il ?

Réponse :
Pour avoir des interférences constructives, on doit avoir

$$\delta = p\lambda \Leftrightarrow 2e\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \beta} + \frac{\lambda}{2} = p\lambda \Leftrightarrow 2e\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \beta} = \lambda(p - \frac{1}{2}) \Leftrightarrow \lambda = \frac{2e\sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 \beta}}{p - \frac{1}{2}}$$

$\lambda > 0$, donc cela ne peut se produire que pour des valeurs de $p > 1$.
Pour $p = 1$, l'application numérique donne $\lambda = 2,3 \cdot 10^{-6}$ m, ce qui est dans l'infrarouge.
Pour $p = 2$, on a $\lambda = 7,5 \cdot 10^{-7}$ m, ce qui est à la limite entre le visible et l'infrarouge. Cette couleur ne sera donc quasiment pas visible.
Pour $p = 3$, on a $\lambda = 4,5 \cdot 10^{-7}$ m, ce qui est bien dans le domaine visible.
Enfin, pour $p = 4$, on a $\lambda = 3,5 \cdot 10^{-7}$ m, ce qui est dans l'UV.
En conclusion, une seule longueur d'onde du visible permet d'obtenir des interférences constructives dans la direction $\beta = 30^\circ$: $\lambda = 4,5 \cdot 10^{-7}$ m. Il s'agit de la couleur bleue.

En réalité, la lumière incidente est une lumière blanche : c'est la lumière du soleil. Elle contient toutes les longueurs d'onde du spectre visible.

13. Expliquer pourquoi, selon l'angle d'observation de la structure, la lumière n'a pas la même couleur.

Réponse :
Comme on l'a vu dans la question 12, la longueur d'onde permettant d'observer des interférences constructives dépend de l'angle d'observation β .
Pour chaque angle d'observation β , on aura donc pour certaines longueurs d'onde des interférences constructives et pour d'autres des interférences destructives. Ainsi, le spectre de la lumière observée ne comportera plus toutes les longueurs d'onde du spectre de la lumière blanche, ce qui donne un aspect coloré à la structure observée dans la direction β .

14. *Supposons que la structure observée soit plongée dans l’eau. Quel paramètre est modifié ? Cela induit un changement de la couleur observée dans une direction donnée. Expliquer.*

Réponse :
Si la structure est plongée dans l’eau, c’est l’indice n_0 qui va changer. Les valeurs de λ permettant d’obtenir des interférences constructives dans une direction donnée sont donc modifiées (toujours d’après l’expression obtenue en question 12), et la couleur observée est modifiée.

15. *La structure précédente est plongée dans l’acétone, d’indice 1,4. On l’observe toujours sous un angle $\beta = 30^\circ$. De quelle couleur apparaîtra-t-elle alors ?*

Réponse :
On refait la même application numérique que dans la question 12 , mais en changeant la valeur de n_0 . Si l’on exclut la longueur d’onde obtenue pour $p = 2$ toujours à la limite de l’IR, on a pour $p = 3$, $\lambda = 4,2.10^{-6}$ m. Il s’agit de la couleur violette.

Pour aller plus loin :
En pratique l’observateur ne sera pas lui même dans l’acétone et donc il observera plutôt la longueur d’onde $\lambda_{\text{obs}} = \lambda/n_0 \approx 300$ nm, qui n’est pas visible !
Il faut alors reconsidérer la solution pour $p = 2$, qui donne, une fois divisée par n_0 , $\lambda'_{\text{obs}} \approx 500$ nm (vert).

II Suspension automobile (Banque PT 2001)

II.A Comportement sur un sol non plat

Dans le cadre d’un modèle simplifié de suspension, on assimile un véhicule à un point matériel G (masse $M = 1,0 \times 10^3$ kg) posé sur sa suspension.
Celle-ci est modélisée par un ressort de raideur $k = 1,0 \times 10^5$ N · m⁻¹ et de longueur à vide l_0 , associé à un amortisseur de constante d’amortissement $k' = 4,0 \times 10^3$ N · m⁻¹ · s.
Le véhicule se déplace à vitesse constante $V_a = 50$ km · h⁻¹ sur un sol ondulé horizontal (axe Oz vers le haut). En outre, G est soumis à l’action d’un amortisseur fluide dont la force est de la forme $-k'\vec{u}$ où $\vec{u}$ est la vitesse relative de ses deux extrémités. On admet que l’on peut donc l’écrire :

$$\vec{f} = -k' \frac{d(z_V - z_S)}{dt} \vec{e}_z$$

L’ondulation est assimilée à une sinusoïde z_S de période spatiale $L = 2$ m et d’amplitude $z_{S0} = 10$ cm comptée à partir de la ligne moyenne.
Pour des raisons de simplicité, on supposera ici que le rayon de la roue est nul, c’est-à-dire que le centre O de la roue suit exactement l’ondulation du sol ($z_O = z_S$).

1. *Donner l’expression de la pulsation d’excitation ω de la suspension en fonction de la vitesse V_a du véhicule et de la période spatiale L . Justifier. Faire l’application numérique.*

Réponse :
Si on appelle T la période de l’excitation liée au sol, il faut une durée $T = \frac{L}{V_a}$ pour parcourir la distance

L qui sépare deux maxima, et $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi V_a}{L} \simeq 44 \text{ rad.s}^{-1}$. Une autre manière de voir les choses : $z_s = z_{s0} \cos(2\pi \frac{x}{L}) = z_{s0} \cos(2\pi \frac{V_a}{L} t) = z_{s0} \cos(2\pi f t)$ d’où la fréquence d’excitation est V_a/L .

2. *Faire un bilan des forces pour la mise en équation du système où seront explicitées les forces agissant sur celui-ci.*

Réponse :
On choisit le châssis de la voiture comme système et on travaille dans le référentiel lié au sol considéré galiléen. Les forces appliquées sont :

- le poids $\vec{P} = M.\vec{g} = -Mg\vec{e}_z$,
- la force élastique du ressort : $\vec{F} = -k(l - l_0).\vec{e}_z$, avec $l = z_V - z_S - OI - JG$ voir figure soit $\vec{F} = -k(z_V - z_S - OI - JG - l_0).\vec{e}_z$.
- la force de frottement fluide : $\vec{f} = -k' \cdot \frac{d\vec{J}}{dt}$ car $\frac{d\vec{J}}{dt}$ est la vitesse de J par rapport à I .
On a ici, $\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d\vec{OJ}}{dt} = \vec{v}_G - \vec{v}_O = (\vec{V}_a + \dot{z}_V \vec{e}_z) - \vec{V}_a - \dot{z}_S \vec{e}_z = (\dot{z}_V - \dot{z}_S).\vec{e}_z$ d’où $\vec{f} = -k'(\dot{z}_V - \dot{z}_S).\vec{e}_z$.

Pour aller plus loin :
Attention aux points d’application des forces et aux forces à prendre en compte ici : le système étant « le châssis », il n’y a pas de réaction du support s’appliquant sur le châssis (elle s’applique à la roue, qui ne fait pas partie du système).

3. *Déterminer l’équation régissant $z_{V,eq}$ la valeur de z_V à l’équilibre pour $z_S = 0$ (route horizontale). Montrer que :*

$$z_{V,eq} = GJ + IO + l_0 - \frac{Mg}{k}$$

Réponse :
Le PFD s’écrit $M\vec{a} = \vec{F} + \vec{f} + \vec{P}$ et donne par projection suivant l’axe Oz :
 $M \frac{d^2 z_V}{dt^2} = -k(z_V - z_S - OI - JG - l_0) - Mg - k'(\frac{dz_V}{dt} - \frac{dz_S}{dt})$
À l’équilibre, on a $0 = -k(z_{V,eq} - OI - JG - l_0) - Mg \Rightarrow z_{V,eq} = GJ + IO + l_0 - \frac{Mg}{k}$.

4. *Exprimer l’équation différentielle vérifiée par $z = z_V - z_{V,eq}$. On rappelle pour cela que z_S n’est pas constante.*

Réponse :
Cette condition permet de simplifier l’équation précédente : on pose $z = z_V - z_{V,eq} \Rightarrow z_V = z + z_{V,eq}$. De plus, $z_{V,eq}$ étant constant, on en déduit $\frac{dz}{dt} = \frac{dz_V}{dt}$ et idem pour la dérivée seconde. On obtient finalement $M\ddot{z} + k'\dot{z} + kz = k'\dot{z}_S + kz_S$ après simplification.

5. *Donner les expressions de la réponse complexe $\frac{\underline{z}}{\underline{z}_S}$ ainsi que son module $|\frac{\underline{z}}{\underline{z}_S}|$ où $\underline{z}$ est l’amplitude complexe de la grandeur complexe z associée à $z(t)$ et $\underline{z}_S$ l’amplitude complexe de celle associée à $z_S(t)$. On posera $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ On pourra montrer que :*

$$\frac{\underline{z}}{\underline{z}_S} = \frac{1 + j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

où les expressions ainsi que les valeurs numériques de Q et de ω_0 sont à déterminer.

Réponse :

Puisque z_s varie de façon sinusoïdale, on passe en notation complexe en posant $\underline{z}_S(t) = \underline{Z}_S \cdot \exp(j\omega t)$ et $\underline{z}(t) = \underline{Z} \exp(j\omega t)$ en RSF.

L'équation différentielle devient, après simplification par $\exp(j\omega t)$,

$$-M\omega^2 \underline{Z} + j\omega k' \underline{Z} + k \underline{Z} = j\omega k' \underline{Z}_S + k \underline{Z}_S, \quad \text{soit}$$

$$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_S} = \frac{j\omega k' + k}{k - M\omega^2 + j\omega k'} = \frac{1 + j\omega \frac{k'}{k}}{1 - \frac{M\omega^2}{k} + j\omega \frac{k'}{k}} \Rightarrow \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_S} = \frac{1 + j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_S} \right| = \sqrt{\frac{1 + \frac{x^2}{Q^2}}{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

On en déduit $\frac{k'}{k} = \frac{1}{\omega_0 Q}$ et $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{M}{k}$ d'où au final : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \approx 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ puis $Q = \frac{\sqrt{Mk}}{k'} \approx 2,5$.

6. Tracer l'allure de $|\underline{H}| = \left| \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_S} \right|$ en fonction de x . Quelle est la signification physique de $|\underline{H}|$?

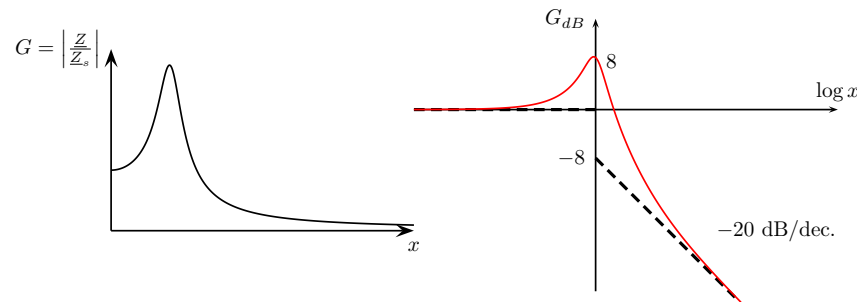
Réponse :

On regarde les équivalents BF et HF, ainsi que les limites du gain $G(x) = \left| \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_S} \right|$:

$$G(x) \underset{x \ll 1}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad G(x) \underset{x \gg 1}{\sim} \frac{1}{Qx} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

En $x = 1$, $G(x = 1) = \sqrt{1 + Q^2} \approx 2,7$.

On a affaire à un filtre mécanique passe bas du second ordre avec présence d'une résonance. Un tracé sous python/calculatrice donne le graphique suivant en échelle linéaire (à gauche) ou logarithmique (à droite).



Physiquement $H = |\underline{H}|$ représente à quel point les perturbations de la route vont être amplifiées (si $H > 1$) ou atténuées (si $H < 1$) en fonction de la fréquence d'excitation (donc en partie en fonction de la vitesse du véhicule).

7. Calculer l'amplitude des oscillations du véhicule se déplaçant à la vitesse V_a .

Réponse :

Si le véhicule roule à $V_a = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 13,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega \simeq 43 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (pulsation des oscillations ressenties par le passager) $x = 4,3$, $\log x \simeq 0,64$ et $\underline{Z} = G \cdot \underline{Z}_S \simeq 1,0 \text{ cm}$ (assez faible).

8. À quelle(s) allure(s) ne faudrait-il surtout pas rouler sur ce sol ondulé ? Pour quelles raisons ?

Réponse :

Il ne faut pas rouler à $V_a = V_0$ correspondant à la résonance qui a lieu pour $\omega \simeq \omega_0$, soit $V_0 \simeq \frac{L\omega_0}{2\pi} \simeq 3,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = \boxed{11 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}$. Le système entrerait alors en résonance, le passager ressentirait des oscillations d'amplitude 25 cm et cela détériorerait les amortisseurs.

Attention, ici la résonance n'a pas lieu pour $\omega = \omega_0$, c'est plus complexe. Annoncer « on sait que H est maximum pour $x = 1$ présente donc assez mal ! En pratique, $\omega_r \approx \omega_0$ lorsque $2Q^2 \gg 1$ ce qui est le cas ici ($Q = 2,5$).

9. À la lueur des résultats obtenus, proposer un moyen de ralentissement des véhicules à l'entrée des zones urbaines.

Réponse :

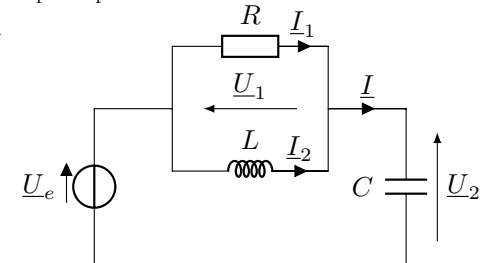
En plaçant des bandes rugueuses à une distance L bien choisie, on peut, en admettant que la fréquence de résonance est la même pour tous les véhicules, s'arranger pour que V_0 soit légèrement supérieure à la vitesse limite, soit $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en zones urbaines. Le calcul donne $\boxed{L \simeq 10 \text{ m}}$

II.B Comportement lors du franchissement d'une bordure

On s'intéresse maintenant au cas du franchissement d'une bordure (le niveau du sol s'élève brusquement) avec $z_S(t) = 0 \forall t < 0$ et $z_S(t) = z_0 \forall t > 0$. Cette fonction n'est ni dérivable, ni continue en $t = 0$ et on ne pourra ainsi pas résoudre simplement l'équation mécanique obtenue dans la partie précédente.

On se propose alors d'étudier le régime transitoire correspondant au franchissement de la bordure à l'aide d'un circuit électrique équivalent, c'est à dire régi par une équation différentielle similaire.

Le circuit ci-contre est alimenté par un générateur de tension parfait délivrant une tension sinusoïdale $\underline{u}_e$ de pulsation ω . On cherche dans un premier temps à identifier la tension qui correspondra à l'inconnue $z(t)$ du problème mécanique



10. Déterminer l'impédance équivalente $\underline{Z}$ de ce circuit vue depuis le générateur.

Réponse :

Vu du générateur, l'impédance est un condensateur en série avec (une résistance et une bobine en parallèle).

$$\text{D'où } \underline{Z} = \frac{1}{jC\omega} + \frac{jRL\omega}{R + jL\omega} = \frac{R + jL\omega - RLC\omega^2}{jC\omega(R + jL\omega)} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}{jC\omega(1 + j\frac{L}{R}\omega)}$$

11. Quelle grandeur de sortie $\underline{U}_s$ doit être choisie (parmi $\underline{U}_1$ ou $\underline{U}_2$) pour obtenir une fonction de transfert harmonique équivalente à celle de la suspension automobile $\{M, k, k'\}$ sur une route déformée sinusoïdalement, c'est-à-dire que :

$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1 + j\frac{\epsilon}{Q}}{1 - \epsilon^2 + j\frac{\epsilon}{Q}} \quad (\text{II.1})$$

où $\epsilon = \frac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite ; ω_0 une pulsation propre et Q , le facteur de qualité dont on trouvera les expressions en fonction de R , L et C .

Réponse :

Deux choix sont possibles et dans les deux cas, on va vérifier les comportements asymptotiques :

- pour $u_s = u_1$, on a $\underline{U}_1 \rightarrow 0$ quand $\omega \rightarrow 0$ (car la bobine est équivalente à un fil en BF) et ce résultat n'est pas compatible avec la fonction de transfert attendue (réponse non nulle en basse fréquence)
- pour $u_s = u_2$, on a $\underline{U}_2 \rightarrow 0$ quand $\omega \rightarrow +\infty$ (condensateur équivalent à un fil en HF) puis $\underline{U}_2 \rightarrow \underline{U}_e$ quand $\omega \rightarrow 0$ (tension nulle aux bornes de la bobine + loi des mailles). Ce comportement asymptotique est compatible avec celui du filtre proposé dans la partie précédente.

On retient ainsi pour la suite $u_s = u_2$ et on obtient la fonction de transfert en utilisant la formule du pont diviseur de tension :

$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1}{\underline{Z}(\omega)} = \frac{1}{\frac{1+j\frac{L}{R}\omega-LC\omega^2}{1+j\frac{R}{L}\omega}}$$

soit

$$\boxed{\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1+j\frac{L}{R}\omega}{1-LC\omega^2+j\frac{L}{R}\omega}}$$

En identifiant à la forme proposée par l'énoncé on obtient $\omega^2/\omega_0^2 = LC\omega^2$ d'où $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\frac{\omega}{Q\omega_0} = \omega\frac{L}{R}$ d'où

$$Q = \frac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

L'expression du facteur de qualité n'est pas la même que celle obtenue pour le circuit RLC série. Cependant, elle est bien sans dimension.

12. Montrer que l'équation différentielle reliant $u_s(t)$ (u_1 ou u_2) à $u_e(t)$ et aux données du problème s'écrit :

$$\frac{d^2}{dt^2}u_s + \frac{1}{RC}\frac{d}{dt}u_s + \frac{1}{LC}u_s = \frac{1}{RC}\frac{d}{dt}u_e + \frac{1}{LC}u_e$$

avec $u_e(t)$ la tension aux bornes du générateur non constante.

Réponse :

La loi des nœuds donne $i = i_1 + i_2$ or $u_1 = L\frac{di_2}{dt}$ et $i_1 = u_1/R$. On dérive donc la loi des nœuds pour obtenir :

$$R\frac{di}{dt} = \left(\frac{d}{dt}u_1 + \frac{R}{L}u_1\right)$$

De plus, la loi des mailles (grande maille) donne $u_e = u_1 + u_2$. On peut ensuite effectuer une combinaison linéaire de la ldm pour faire apparaître le courant puis utiliser $i = C\frac{du_2}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{du_e}{dt} + \frac{R}{L}u_e &= R\frac{di}{dt} + \frac{du_2}{dt} + \frac{R}{L}u_2 \\ \Rightarrow \frac{du_2}{dt} + \frac{R}{L}u_2 + RC\frac{d^2u_2}{dt^2} &= \frac{du_e}{dt} + \frac{R}{L}u_e \\ \Rightarrow \boxed{\frac{d^2}{dt^2}u_2 + \frac{1}{RC}\frac{d}{dt}u_2 + \frac{1}{LC}u_2} &= \frac{1}{RC}\frac{d}{dt}u_e + \frac{1}{LC}u_e \end{aligned}$$

Remarque : On aurait aussi pu partir de la fonction de transfert obtenue précédemment.

Pour l'étude du régime transitoire associé au franchissement de la bordure, on considère la fonction échelon

$$u_e : t \rightarrow 0, \forall t \leq 0 \quad \text{et} \quad u_e : t \rightarrow E, \forall t > 0$$

Dans toute la suite, on raisonnera sur les équations faisant intervenir des grandeurs ω_0 et Q afin de pouvoir relier aisément le système mécanique au système électrique.

13. En quoi le choix pour u_e est-il pertinent pour la description du franchissement d'une bordure ?

Réponse :

Dans le cadre de l'analogie électromécanique, la tension u_e aux bornes du GBF est analogue à la hauteur du sol z_s . Lors du franchissement d'un trottoir, la hauteur (constante avant) va ainsi soudainement augmenter d'une dizaine de centimètres puis redevenir constante. C'est bien le comportement qui est décrit ici.

14. Obtenir deux conditions initiales sur u_s en $t = 0^+$. Une réponse rigoureusement rédigée est attendue. Exprimez ensuite ces dernières à l'aide de E , ω_0 et Q .

Réponse :

La charge initiale du condensateur n'est pas mentionnée dans l'énoncé. A $t = 0^-$, on a $i(0^-) = 0$ (condensateur en RP) puis $u_1(0^-) = 0$ (bobine $\Leftrightarrow$ fil en RP) donc $i_1(0^-) = 0$ (résistance) et finalement $i_2(0^-) = 0$ (loi des nœuds).

On en déduit à l'aide de la loi des mailles appliquées à $t = 0^-$ que $0 = 0 + u_2(0^-) \Rightarrow u_2(0^-) = 0$ or la tension aux bornes du condensateur est continue donc $\boxed{u_2(0^+) = 0}$.

La dérivée de cette tension n'est pas nécessairement continue (aucun résultat de cours ne permet de le prouver rapidement). On va donc étudier le circuit à $t = 0^+$ en y appliquant la loi des mailles : $E = u_1(0^+) + u_2(0^+) \Rightarrow u_1(0^+) = E$. De plus, on a par continuité du courant à travers la bobine, $i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0$ mais aussi $i_1(0^+) = u_1(0^+)/R = E/R$.

Finalement, l'application de la loi des nœuds donne $i(0^+) = i_1(0^+) = E/R = C\frac{du_2}{dt}(0^+) \Rightarrow \boxed{\frac{du_2}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC} = \frac{E\omega_0}{Q}}$

15. Résoudre ensuite l'équation différentielle obtenue pour $t > 0$ (on retiendra la valeur du facteur de qualité obtenue dans la première partie).

Réponse :

Pour $t > 0$, on a $u_e(t) = E$ et donc : $\frac{d^2}{dt^2}u_2 + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d}{dt}u_2 + \omega_0^2u_2 = \omega_0^2E$

Pour $Q = 2,5 > 1/2$, on se place dans le cas du régime pseudo-périodique et donc

$$u_2(t) = e^{-t/\tau} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) + E$$

avec $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ et $\tau = \frac{\omega_0}{2Q}$ La première CI donne $A + E = 0$. On dérive ensuite la tension :

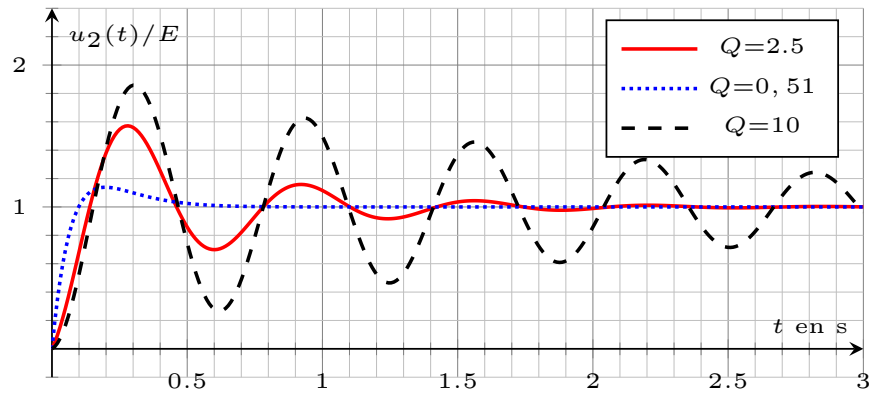
$$\frac{du_2}{dt}(t) = -\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}(B \sin(\Omega t) - E \cos(\Omega t)) + e^{-t\tau}(B\Omega \cos(\Omega t) + E \sin(\Omega t))$$

La deuxième CI donne $\frac{E\omega_0}{Q} = \frac{2E}{\tau} = \frac{E}{\tau} + B\Omega \Rightarrow B = \frac{E}{\tau\Omega}$. On trouve au final :

$$\boxed{u_2(t) = Ee^{-t/\tau} \left(\frac{E}{\tau\Omega} \sin(\Omega t) - \cos(\Omega t) \right) + E}$$

16. Représenter graphiquement la solution obtenue à l'aide de la calculatrice ou d'un script python pour la valeur du facteur de qualité trouvée précédemment ainsi que pour $Q = 0,51$ et $Q = 10$. Dans les trois cas, retrouver graphiquement la valeur du maximum global de u_s . Pour les applications numériques, on prendra $E = 1\text{ V}$ et $\omega_0 = 10\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Réponse :



Graphiquement, on obtient $u_{2,\max}(Q = 10) = 1,95E$, $u_{2,\max}(Q = 2,5) = 1,6E$ puis finalement $u_{2,\max}(Q = 0,51) \approx 1,15E$ (peu de dépassement dans le dernier cas). Afin d'éviter un désagrément aux passagers, il convient d'utiliser un faible facteur de qualité

II.C Conclusion

17. Afin de construire un système de suspension efficace, que préconisez-vous pour le choix du facteur de qualité au regard des résultats obtenus dans les précédentes parties

Réponse :

Dans le premier cas (sol ondulé), on constate que pour un facteur de qualité élevé, on peut rencontrer un phénomène de résonance qui peut être gênant. Dans le deuxième cas (franchissement d'une bordure), on observe aussi que le dépassement dépend du facteur de qualité.

Il convient donc de réaliser un système avec un faible facteur de qualité.
