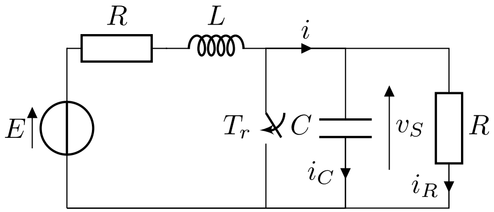
Physique - Devoir Maison 03
07/11/2024

Corrigé

I Circuit second ordre



On considère le circuit de la figure ci-contre, dans lequel l'interrupteur T_r est fermé depuis un temps suffisamment long pour que le régime permanent soit établi.

On s'intéresse au régime transitoire qui suit l'ouverture de l'interrupteur à l'instant $t = 0$.

1. *Établir l'équation différentielle sous la forme canonique concernant v_s après l'ouverture de l'interrupteur puis montrer que la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q ont pour expression :*

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}} \quad et \quad Q = \frac{\sqrt{2LC}}{RC + \frac{L}{R}} \tag{I.1}$$

Réponse :
Pour $t > 0$, l'interrupteur est ouvert donc il n'y a pas de courant dans sa branche. La loi des noeuds indique

$$i = i_C + i_R \Rightarrow i = C\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + \frac{v_s}{R}$$

La loi des mailles indique alors

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + v_s$$

On y injecte alors l'expression du courant obtenue à l'aide de la loi des noeuds en fonction de v_s pour obtenir

$$E = RC\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + v_s + LC\frac{\mathrm{d}^2v_s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + v_s$$

soit finalement sous la forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}^2v_s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{RC + L/R}{LC}\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{LC}v_s = \frac{1}{LC}E$$

On obtient alors par identification avec la forme canonique que

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}} \text{ et } \frac{\omega_0}{Q} = \frac{RC + L/R}{LC} \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{2}{LC}}\frac{LC}{RC + L/R} = \frac{\sqrt{2LC}}{RC + \frac{L}{R}}}$$

d'où les résultats.

---

2. *Déterminer numériquement ces coefficients à partir des valeurs numériques suivantes : $E = 15\,\mathrm{V}$, $L = 0{,}10\,\mathrm{H}$, $C = 1000\,\mu\mathrm{F}$ et $R = 30\,\Omega$.*

Réponse :
On trouve $\boxed{\omega_0 = 1{,}41 \times 10^2\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}} \text{ et } Q = 0,424 < \frac{1}{2}}$.

---

3. *On recherche ensuite les conditions initiales pour v_s. Montrer que :*

$$v_s(0^+) = 0 \quad et \quad \frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{RC}$$

Réponse :

— On a par continuité de la tension aux bornes du condensateur $\boxed{v_s(0^+) = v_s(0^-) = 0}$ (interrupteur fermé pour $t < 0$ donc tension nulle à ses bornes).

— La dérivée de v_s apparaît dans la relation constitutive du condensateur $i_C = C\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}$. Il convient alors d'exprimer ce courant à $t = 0^+$.
Pour cela, on remarque que $i(0^+) = i_C(0^+) + i_R(0^+)$ et que $i_R(0^+) = v_s(0^+)/R = 0$ d'après le point précédent. La présence de la bobine dans la maille principale indique que $i(0^+) = i(0^-)$. Cette dernière quantité peut alors être simplement exprimée à l'aide d'une loi des mailles exprimée à $t = 0^-$ (donc en régime permanent lorsque $u_L = 0$) :

$$E = Ri(0^-) + \underbrace{v_s(0^-)}_{=0} \Rightarrow i(0^-) = \frac{E}{R} \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{RC}}$$

---

4. *Résoudre l'équation différentielle sur $v_s(t)$ pour $t > 0$ en exprimant $v_s(t)$ sous la forme :*

$$v_s(t) = A + B_+e^{-t/\tau_+} + B_-e^{-t/\tau_-}$$

Expliciter ensuite les variables A, B_+, B_-, τ_+ et τ_- en fonction des données du problème ainsi que leurs valeurs numériques.

Réponse :
La valeur du facteur de qualité obtenue précédemment indique que l'on est en présence d'un régime apériodique. On obtient donc la solution générale :

$$v_s = v_{s,part} + B_+e^{-t/\tau_+} + B_-e^{-t/\tau_-}$$

avec B_- et B_+, deux constantes à determiner à l'aide des CIs. De plus, τ_- et τ_+ sont données par la résolution de l'équation caractéristique $r^2 + (\omega_0/Q)r + \omega_0^2 = 0$ d'où

$$r_\pm = \boxed{-\frac{1}{\tau_\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{1/(4Q^2) - 1}}$$

puis $\boxed{\tau_+ \approx 12{,}7\,\mathrm{ms}}$ et $\boxed{\tau_- \approx 3.92ms}$.
L'étude de l'équation différentielle permet ensuite d'obtenir une solution particulière constante, à savoir $\boxed{A = E/2 \approx 7{,}5\,\mathrm{V}}$. Il convient alors de déterminer les deux constantes $B_\pm$ à l'aide des CIs.
La première condition initiale donne

$$v_s(0^+) = 0 = \frac{E}{2} + B_+ + B_- \tag{I.2}$$

On dérive alors l'expression de v_s

$$\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} = -\frac{B_+}{\tau_+}e^{-t/\tau_+} - \frac{B_-}{\tau_-}e^{-t/\tau_-}$$

d'où à l'instant initial

$$\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{RC} = -\frac{B_+}{\tau_+} - \frac{B_-}{\tau_-} \tag{I.3}$$

On obtient alors un système de deux équations (I.2 et I.3) à deux inconnues, B_+ et B_-, que l'on peut résoudre

$$B_+ = -E/2 - B_- \quad \text{et} \quad \frac{E}{RC} = \frac{E/2 + B_-}{\tau_+} - \frac{B_-}{\tau_-}$$

d'où après simplification

$$\boxed{B_- = E\left(\frac{1}{RC} - \frac{1}{2\tau_+}\right)\frac{\tau_+\tau_-}{\tau_- - \tau_+} \approx 0{,}5\,\mathrm{V}}$$

puis

$$\boxed{B_+ \approx -8\,\mathrm{V}}$$

5. *Représenter l'allure de $v_s(t)$ en plaçant toutes les informations utiles sur le graphique.*

Réponse :