Physique - Devoir Maison 01

23/09/2024

Corrigé

I Détermination de la masse du soleil

1. *Rappeler l'expression de la force exercée par une masse ponctuelle M_1 (de masse m_1) sur une masse ponctuelle M_2 (de masse m_2), distantes de r.*

Réponse :
D'après la loi de la gravitation universelle :

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{Gm1m_2}{r^2}\overrightarrow{u_{12}}}$$

où $\overrightarrow{u_{12}}$ est le vecteur unitaire (sans dimension) dirigé de M_1 vers M_2.

---

2. *Exprimer la dimension de la constante de gravitation universelle $\mathcal{G}$ en fonction des grandeurs de base du système international. En quelle unité s'exprime-t-elle ?*

Réponse :
L'équation aux dimensions associée à l'expression précédente est :

$$[F] = [\mathcal{G}]\frac{M^2}{L^2}$$

Or, on sait que $[F] = MLT^{-2}$, d'où

$$\boxed{[\mathcal{G}] = \frac{MLT^{-2}L^2}{M^2} = L^3M^{-1}T^{-2}}$$

Elle s'exprime donc en $\underline{\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}}$

---

3. *On considère une planète de masse m en orbite circulaire autour du Soleil (de masse M_s) à la distance r de son centre. Son énergie potentielle peut s'écrire $E_p = -\dfrac{\mathcal{G}mM_s}{r}$. Vérifier l'homogénéité de cette expression.*

Réponse :
On a d'une part $[E_p] = [E_c] = ML^2T^{-2}$, et d'autre part :

$$\left[\frac{\mathcal{G}mM_s}{r}\right] = \frac{L^3M^{-1}T^{-2}M^2}{L^2} = MLT^{-1}$$

Finalement, les deux termes ont la même dimension, donc l'expression est homogène.

---

4. *La période T de son mouvement dépend de la masse du Soleil M_s, du rayon r de son orbite et de la constante de gravitation universelle $\mathcal{G}$. Proposer une expression de T de la forme*

$$T = k \times M_s^{\alpha}\mathcal{G}^{\beta}r^{\gamma}$$

où k est une constante sans dimension que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Réponse :
On cherche T de la forme $T = kM_s^{\alpha}\mathcal{G}^{\beta}r^{\gamma}$. L'équation aux dimensions associée est :

$$T = M^{\alpha}(L^3T^{-2}M^{-1})^{\beta}L^{\gamma}$$

On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 3\beta + \gamma = 0 \\ 1 = -2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta = -\frac{1}{2} \\ \gamma = -3\beta = \frac{3}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On a donc finalement :

$$T = k\sqrt{\frac{r^3}{M_s\mathcal{G}}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{k^2}{M_s\mathcal{G}}}$$

---

5. *Bonus : On admet que $k = 2\pi$. Quelle loi reconnaît-on ?*

Réponse :
On reconnaît la $\boxed{\text{3ème loi de KÉPLER}}$: $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{M_s\mathcal{G}}$.

On donne pour les différentes planètes du système solaire le rayon moyen de leur orbite ainsi que leur période de révolution. On rappelle que 1 $u.a$ (unité astronomique)$= 1,5.10^{11}$ m.

Planète	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
T (jours)	88	225	365	687	4335	10758	30687	60224
r (u.a.)	0,4	0,7	1	1,5	5,2	9,5	19,6	30,1

6. *Quelle courbe faut-il tracer pour vérifier la relation obtenue à la question 4 ?*

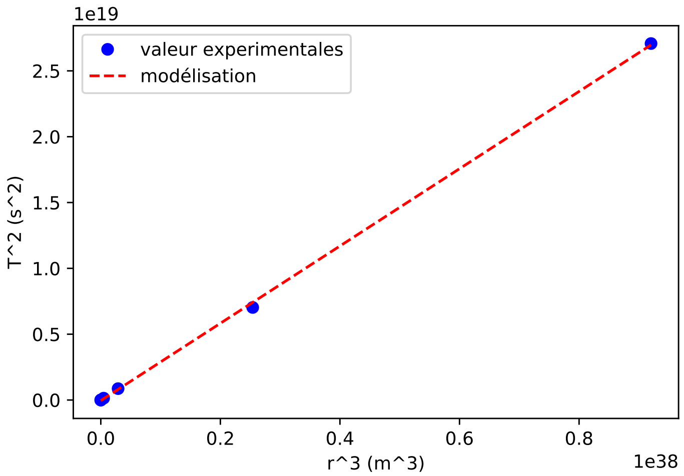
Réponse :
On peut poser $y = T^2$ et $x = r^3$ et on a $y = \frac{4\pi^2}{M_s\mathcal{G}}x$, soit une relation linéaire.
On peut aussi poser $y = T$ et $x = r^{3/2}$ et on a $y = \frac{2\pi}{\sqrt{M_s\mathcal{G}}}x$, soit une (autre) relation linéaire.
Pour la suite du corrigé, on considérera la première forme.

Pour aller plus loin :
Attention, il ne faut surtout pas affirmer que T est proportionnel à r. En effet, T et r sont certes reliés, mais via une puissance $3/2$. En pratique, multiplier le rayon par deux ne permet pas de multiplier la période par deux.

---

7. *Faire la régression linéaire (calculatrice ou python) et noter le résultat sur votre copie. La loi est-elle validée ?*

Réponse :
On commence par convertir les données en unité S.I. : on multiplie la durée en jours par 3600×24 pour l'avoir en secondes et la distance en u.a. par $1,5.10^{11}$ (distance moyenne terre/soleil) pour l'avoir en m.
A la calculatrice, on ne peut pas modéliser par une fonction linéaire même si ce serait le modèle le plus adapté. Avec une modélisation affine, on trouve une pente de $a = 2{,}94 \times 10^{-19}$ USI et une ordonnée à l'origine bien plus faible que les ordonnées en jeu dans le graphique. On peut donc négliger cette dernière et ainsi affirmer que le modèle linéaire est valide.



---

8. *Déduire de la modélisation précédente la valeur de la masse du soleil. On donne* $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}$ USI

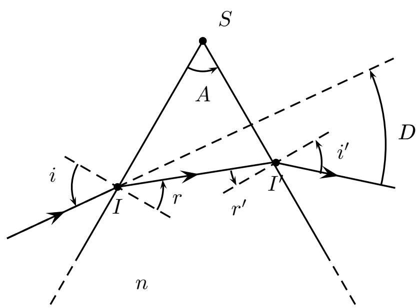
Réponse :
La pente de la droite est $a = \frac{4\pi^2}{M_s \mathcal{G}} \Leftrightarrow M_s = \frac{4\pi^2}{a\mathcal{G}}$. L'application numérique donne $\boxed{M_s = 2 \times 10^{30}\ \text{kg}}$.
On obtient bien le bon ordre de grandeur.

II Étude d'un prisme

On appelle prisme un milieu transparent que nous supposerons homogène et isotrope d'indice n limité par deux dioptres plans non parallèles.

On appelle arête du prisme la droite selon laquelle se coupent les deux dioptres et plan de section principale tout plan perpendiculaire à l'arête.

La figure ci-contre est faite dans un plan de section principale. On suppose que le prisme baigne dans l'air d'indice $n_{air} \simeq 1$.



II.A Mise en équation

1. *Montrez que l'étude est limité à un plan de section principale c'est à dire que les trois rayons sont contenu dans le plan de la figure.*

Réponse :
Il suffit d'appliquer deux fois la 1ère loi de Snell-Descartes (d'abord en I puis en I'). Ce résultat est notamment vérifié car les normales aux deux surfaces du prisme ainsi que le rayon incident font partie du même plan.

Ainsi, on montre que le rayon incident et le rayon traversant le prisme sont coplanaire (1ière loi en I) puis que le rayon émergent et le rayon traversant sont coplanaires (1ière loi en I') d'où le résultat.

---

2. *Écrivez les lois de Snell-Descartes en I et I' : relations (1) et (2)*

Réponse :
D'après la 3$^{\text{ième}}$ loi de Snell-Decartes, on a avec les notations de la figure et pour $n_{air} = 1$ pour le premier et le deuxième dioptre :

$$\boxed{\sin(i) = n\sin(r)} \quad \text{et} \quad n\sin(-r') = \sin(-i') \Rightarrow \boxed{n\sin(r') = \sin(i')}$$

Les signes moins proviennent de la mauvaise orientation des angles r' et i'. Cependant, ils sont simplement retirés par simplification, grâce au fait que la fonction sinus est impaire.

---

3. *Déterminez une relation entre A, r et r' : relation (3)*

Réponse :
Dans le triangle AII', $\widehat{AII'} = \frac{\pi}{2} - r$ et $\widehat{AI'I} = \frac{\pi}{2} - r'$, d'où :

$$\widehat{A} + \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) = \pi$$

Soit au final :

$$A - r - r' = 0 \Leftrightarrow \boxed{A = r + r'}$$

---

4. *La déviation du prisme D est l'angle que fait le rayon émergent (s'il existe) avec le rayon incident. Calculez D en fonction de i et i' : relation (4). En déduire une relation entre D, A et n si i et A sont faibles.*

Réponse :
La déviation est la somme des deux déviations à la traversée de chacun des dioptres :

$$D_1 = i - r\ ,\ D_2 = i' - r'$$

Ainsi, d'après la question précédente, on obtient :

$$D = D_1 + D_2 = i + i' - (r + r') = i + i' - A$$

Dans le cas ou i et A sont faibles, on peut déduire graphiquement ou par le calcul que i' est aussi faible. Il en va de même pour r et r'.
Sous ces hypothèses, on peut simplifier les relations (2) et (3) :

$$i \approx nr \quad \text{et} \quad i' \approx nr' \qquad \text{(II.1)}$$

Et on obtient finalement $\boxed{D = (n-1)A}$.
Cette relation semble pertinente. En effet, en absence de dioptre ($n = 1$), le rayon émergent n'est pas dévié.

5. *À quelle condition sur A y a-t-il un rayon émergent ?*

Réponse :
Le premier dioptre ne pose pas de soucis en terme de condition d'existence du rayon émergent. Il faut donc considérer le second (passage d'un milieu donné vers un milieu moins réfringent). On sait d'après les questions précédentes que :

$$r' = A - r = A - \arcsin\left(\frac{\sin(i)}{n}\right)$$

On en déduit pour qu'il n'y ai pas réflexion totale que

$$-\arcsin(1/n) + \arcsin\left(\frac{\sin(i)}{n}\right) \leq A \leq \arcsin(1/n) + \arcsin\left(\frac{\sin(i)}{n}\right)$$

L'inégalité de gauche est toujours vérifiée. De plus, l'inégalité de droite possède des solutions tant que $\boxed{A < 2\arcsin(1/n)}$. Dans ce cas, il existe au moins un rayon incident qui pourra traverser le prisme. Au delà, tous les rayons seront complètement réfléchis.

II.B Déviation du prisme

On peut montrer que lorsque la déviation est minimale, on a la relation suivante (démonstration dans le corrigé en partant de $\frac{dD}{di} = 0$ pour la déviation extrémale) :

$$\cos(r')\cos(i) = \cos(r)\cos(i')$$

On part de la relation (3) que l'on dérive par rapport à i :

$$\frac{dD}{di} = \frac{di}{di} + \frac{di'}{di} - \frac{dA}{di} \tag{II.2}$$

$$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di} \tag{II.3}$$

Il faut maintenant exprimer la dérivée de i' par rapport à i. Pour cela, on va différencier [1] les relations (1) et (2) :

$$di\cos(i) = ndr\cos(r) \tag{II.4}$$

$$di'\cos(i') = ndr'\cos(r') \tag{II.5}$$

Puis diviser l'une par rapport à l'autre :

$$\frac{di'}{di} = \left(\frac{\cos(r')\cos(i)}{\cos(r)\cos(i')}\right)\frac{dr'}{dr}$$

Or, r et r' sont lié par l relation (3) : $A = r + r'$ donc $r' = A - r$ soit $dr'/dr = -1$ En combinant tout ces résultats, on obtient :

$$\frac{dD}{di} = 1 - \left(\frac{\cos(r')\cos(i)}{\cos(r)\cos(i')}\right)$$

On remarque dans ce cas qu'il est beaucoup plus facile d'obtenir la relation sur la dérivée de D par rapport à i que celle liant directement D et i.

D passe par une valeur extrémale lorsque sa dérivée s'annule et on peut se convaincre que ce cas correspond à un minimum qui est obtenu lorsque :

$$\boxed{\cos(r')\cos(i) = \cos(r)\cos(i')}$$

1. Ces résultats peuvent se démontrer en différenciant ces expressions par rapport à i et i' puis en les multipliant par di et di'

6. *Montrer alors que, dans le prisme, la lumière se propage orthogonalement au plan bissecteur.*

Réponse :
On remarque que $r = r'$ est solution de cette équation. En effet, cela implique à l'aide de (1) et (2) $i = i'$ d'où le résultat.
Dans ce cas, le triangle ISI' devient isocèle et donc sa base (II') coupe perpendiculairement la bissectrice issue de S.

7. *Établir l'expression de n en fonction de A et D_m.*

Réponse :
Lorsque l'on se situe à la déviation minimale, on a $i' = i$ et $r' = r$. On en déduit $D_m = 2i - A$ soit :

$$i = \frac{A + D_m}{2} \Rightarrow \sin(i) = \sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right) = n\sin(r)$$

or, $A = r + r' \Rightarrow r = A/2$. En combinant ces résultats, on obtient :

$$\boxed{n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}}$$